Analisi Matematica 1 e Matematica 1

Derivate: esercizi

Anna Lisa Amadori e Benedetta Pellacci

amadori@uniparthenope.it

pellacci@uniparthenope.it

Università di Napoli "Parthenope"

Esercizio 2

Calcolare la derivata di $\sqrt{x} - e^x + \cos x$.

Per l'algebra delle derivate

$$D\left(\sqrt{x} - e^x + \cos x\right) = D\sqrt{x} - De^x + D\cos x.$$

Osserviamo che $\sqrt{x} = x^{1/2}$ e dunque

$$D\sqrt{x} = Dx^{1/2} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Pertanto

$$D\left(\sqrt{x} - e^x + \cos x\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - e^x - \sin x.$$

Esercizio 3

Calcolare la derivata di $\dfrac{x^3 - x + 1}{x^2 - 5}$.

Usiamo la formula di derivazione del rapporto

$$
\begin{aligned}
D\left(\frac{x^3 - x + 1}{x^2 - 5}\right) &= \\
\frac{D(x^3 - x + 1)\,(x^2 - 5) - (x^3 - x + 1)\,D(x^2 - 5)}{(x^2 - 5)^2} & \\
&= \frac{(3x^2 - 1)\,(x^2 - 5) - (x^3 - x + 1)\,2x}{(x^2 - 5)^2} \\
&= \frac{3x^4 - 15x^2 - x^2 + 5 - 2x^4 + 2x^2 - 2x}{(x^2 - 5)^2} \\
&= \frac{x^4 - 14x^2 - 2x + 5}{(x^2 - 5)^2}
\end{aligned}
$$

Esercizio 5

Calcolare la derivata di $\sqrt{1-x^3}$, specificando il dominio di derivabilità e classificando gli eventuali punti di non derivabilità.

La funzione $\sqrt{y}$ ha come dominio $y \geq 0$, ed è derivabile per $y > 0$. Dunque per la funzione assegnata

dominio: $1 - x^3 \geq 0 \Leftrightarrow x^3 \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 1$,

derivabile per $1 - x^3 > 0 \Leftrightarrow x^3 < 1 \Leftrightarrow x < 1$.

Usiamo la formula di derivazione della funzione composta per $x < 1$:

$$D\left(\sqrt{1-x^3}\right) = (D\sqrt{\ })(1-x^3) \cdot D(1-x^3)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1-x^3}} \cdot (-3x^2) = -\frac{3x^2}{2\sqrt{1-x^3}}$$

Esercizio 5

Calcolare la derivata di $\sqrt{1-x^3}$, specificando il dominio di derivabilità e classificando gli eventuali punti di non derivabilità.

In $x = 1$, usiamo la definizione di derivata

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{1-x^3}-0}{x-1} &= \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{(1-x)\,(1+x+x^2)}}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x+x^2}}{-(1-x)} \\
&= \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{1+x+x^2}}{-\sqrt{1-x}} = -\infty
\end{aligned}$$

Dunque $x = 1$ è un punto a tangente verticale.

Esercizio 6

Calcolare la derivata di $\log\left(\frac{3x-1}{2x-5}\right)$.

Possiamo usare direttamente la formula di derivazione della funzione composta

$$D\left(\log\left(\frac{3x-1}{2x-5}\right)\right) = (D\log)\left(\frac{3x-1}{2x-5}\right) \cdot D\left(\frac{3x-1}{2x-5}\right)$$

In questo modo dovremo poi anche calcolare la derivata del rapporto.

Esercizio 6

Calcolare la derivata di $\log\left(\frac{3x-1}{2x-5}\right)$.

I conti si semplificano notevolmente se usiamo prima le proprietà del logaritmo:

$$\log\frac{3x-1}{2x-5} = \log(3x-1) - \log(2x-5).$$

Esercizio 6

Calcolare la derivata di $\log\left(\frac{3x-1}{2x-5}\right)$.

Così, uso prima la derivata della differenza

$$D\left(\log\frac{3x-1}{2x-5}\right) = D\left(\log(3x-1) - \log(2x-5)\right)$$
$$= D\log(3x-1) - D\log(2x-5)$$

e poi la derivata della funzione composta

$$= (D\log)(3x-1)\cdot D(3x-1) - (D\log)(2x-5)\cdot D(2x-5)$$
$$= \frac{3}{3x-1} - \frac{2}{2x-5}$$

Esercizio 7

Calcolare la derivata di $x\,e^{1/(1-x)}$.

Usiamo prima la derivata del prodotto:

$$D\left(x\,e^{1/(1-x)}\right) = Dx \cdot e^{1/(1-x)} + x \cdot D\left(e^{1/(1-x)}\right)$$
$$= e^{1/(1-x)} + x \cdot D\left(e^{1/(1-x)}\right)$$

Esercizio 7

Calcolare la derivata di $x\,e^{1/(1-x)}$.

Usiamo prima la derivata del prodotto:

$$\begin{aligned} D\left(x\,e^{1/(1-x)}\right) &= Dx \cdot e^{1/(1-x)} + x \cdot D\left(e^{1/(1-x)}\right) \\ &= e^{1/(1-x)} + x \cdot D\left(e^{1/(1-x)}\right) \end{aligned}$$

poi la derivata della funzione composta:

$$\begin{aligned} &= e^{1/(1-x)} + x \cdot (D\exp)\left(\frac{1}{1-x}\right) \cdot D\left(\frac{1}{1-x}\right) \\ &= e^{1/(1-x)} + x \cdot e^{1/(1-x)} D\left(\frac{1}{1-x}\right) \end{aligned}$$

Esercizio 7

Calcolare la derivata di $x\,e^{1/(1-x)}$.

Usiamo prima la derivata del prodotto:

$$D\left(x\,e^{1/(1-x)}\right) = e^{1/(1-x)} + x \cdot D\left(e^{1/(1-x)}\right)$$

poi la derivata della funzione composta:

$$= e^{1/(1-x)} + x \cdot e^{1/(1-x)} D\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

infine la derivata del reciproco:

$$= e^{1/(1-x)} + x e^{1/(1-x)} \left(-\frac{D(1-x)}{(1-x)^2}\right)$$

$$= e^{1/(1-x)} + x e^{1/(1-x)} \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1-x+x^2}{(1-x)^2} e^{1/(1-x)}$$

Esercizio 8

Calcolare la derivata di $\dfrac{\sin(x^2+\pi)}{2x+1}$.

Usiamo prima la derivata del rapporto:

$$D\left(\frac{\sin(x^2+\pi)}{2x+1}\right) =$$

$$\frac{D\left(\sin(x^2+\pi)\right)\cdot(2x+1)-\sin(x^2+\pi)\cdot D(2x+1)}{(2x+1)^2}$$

$$\frac{D\left(\sin(x^2+\pi)\right)\cdot(2x+1)-2\sin(x^2+\pi)}{(2x+1)^2}$$

Esercizio 8

Calcolare la derivata di $\dfrac{\sin(x^2+\pi)}{2x+1}$.

Usiamo prima la derivata del rapporto:

$$D\left(\frac{\sin(x^2+\pi)}{2x+1}\right) = \frac{D\left(\sin(x^2+\pi)\right)\cdot(2x+1) - 2\sin(x^2+\pi)}{(2x+1)^2}$$

poi la derivata della funzione composta:

$$= \frac{(D\sin)(x^2+\pi)\cdot D(x^2+\pi)\cdot(2x+1) - 2\sin(x^2+\pi)}{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{\cos(x^2+\pi)\cdot 2x\cdot(2x+1) - 2\sin(x^2+\pi)}{(2x+1)^2}$$

Esercizio 9

Calcolare la derivata di $\dfrac{3x\sqrt[3]{1-x^2}}{1+\cos x}$.

Portiamo fuori il 3 (che è una costante moltiplicativa) e cominciamo a derivare il rapporto:

$$D\left(\frac{3x\sqrt[3]{1-x^2}}{1+\cos x}\right)$$

$$= 3\frac{D\left(x\sqrt[3]{1-x^2}\right)\cdot(1+\cos x) - x\sqrt[3]{1-x^2}\cdot D(1+\cos x)}{(1+\cos x)^2}$$

$$= 3\frac{D\left(x\sqrt[3]{1-x^2}\right)\cdot(1+\cos x) + x\sqrt[3]{1-x^2}\sin x}{(1+\cos x)^2}$$

Esercizio 9

Calcolare la derivata di $\dfrac{3x\sqrt[3]{1-x^2}}{1+\cos x}$.

Per calcolare $D\left(x\sqrt[3]{1-x^2}\right)$, usiamo prima la derivata del prodotto:

$$D\left(x\sqrt[3]{1-x^2}\right) = Dx\cdot\sqrt[3]{1-x^2} + x\cdot D\sqrt[3]{1-x^2}$$
$$= \sqrt[3]{1-x^2} + x\cdot D\sqrt[3]{1-x^2}$$

Esercizio 9

Calcolare la derivata di $\dfrac{3x\sqrt[3]{1-x^2}}{1+\cos x}$.

Per calcolare $D\left(x\sqrt[3]{1-x^2}\right)$, usiamo prima la derivata del prodotto:

$$D\left(x\sqrt[3]{1-x^2}\right) = \sqrt[3]{1-x^2} + x \cdot D\sqrt[3]{1-x^2}$$

poi la derivata della funzione composta:

$$= \sqrt[3]{1-x^2} + x \cdot \left(D(\sqrt[3]{\ })(1-x^2) \cdot D(1-x^2)\right)$$

$$= \sqrt[3]{1-x^2} + x \cdot \left(\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{1}{3}-1}(-2x)\right)$$

$$= \sqrt[3]{1-x^2} - \frac{2x^2}{3\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}.$$

Esercizio 9

Calcolare la derivata di $\dfrac{3x\sqrt[3]{1-x^2}}{1+\cos x}$.

Concludendo

$$D\left(\frac{3x\sqrt[3]{1-x^2}}{1+\cos x}\right)$$

$$= 3\frac{D\left(x\sqrt[3]{1-x^2}\right)\cdot(1+\cos x) + x\sqrt[3]{1-x^2}\sin x}{(1+\cos x)^2}$$

$$= 3\frac{\left(\sqrt[3]{1-x^2} - \frac{2x^2}{3\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}\right)(1+\cos x) + x\sqrt[3]{1-x^2}\sin x}{(1+\cos x)^2}$$