Analisi Matematica 1 e Matematica 1

Regole di calcolo per le derivate

Anna Lisa Amadori e Benedetta Pellacci

amadori@uniparthenope.it

pellacci@uniparthenope.it

Università di Napoli "Parthenope"

Teorema (Derivata della funzione composta)

Siano f *e* g *due funzioni e* $x \in \mathbb{R}$*. Se* f *è derivabile in* x *e* g *è derivabile in* $y = f(x)$*, allora* $g \circ f$ *è derivabile in* x *e vale la formula*

$$\boxed{(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)}$$

Teorema (Derivata della funzione composta)

Siano f e g due funzioni e $x \in \mathbb{R}$. Se f è derivabile in x e g è derivabile in $y = f(x)$, allora $g \circ f$ è derivabile in x e vale la formula

$$\boxed{(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)}$$

Esempio

Calcoliamo la derivata di $\sin^3 x$.

Dobbiamo riconoscere quali funzioni elementari compongono la nostra, e in quale ordine:

$$x \mapsto \sin x \mapsto (\sin x)^3.$$

Sostituiamo nella formula $f(x) = \sin x$, $g(y) = y^3$:

$$(\sin^3 x)' = 3\sin^2 x \cos x.$$

Teorema (Derivata della funzione composta)

Siano f e g due funzioni e $x \in \mathbb{R}$. Se f è derivabile in x e g è derivabile in $y = f(x)$, allora $g \circ f$ è derivabile in x e vale la formula

$$\boxed{(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)}$$

Esempio

Calcoliamo la derivata di $\sin(x^3)$.

Ora: $\quad x \longmapsto x^3 \longmapsto \sin(x^3)$.

Dunque nella formula leggiamo

$$f(x) = x^3, \qquad g(y) = \sin y$$

$$(\sin(x^3))' = \cos(x^3)\, 3x^2.$$

$$Da^x = a^x \log a \qquad x \in \mathbb{R}$$

per qualunque base $a > 0,\ a \neq 1$

Per le proprietà di esponenziale/logaritmo, abbiamo che $a = e^{\log a}$, sicché

$$a^x = \left(e^{\log a}\right)^x = e^{x \log a}.$$

Abbiamo dunque una funzione composta

$$x \mapsto x \log a \mapsto e^{x \log a}$$

e otteniamo

$$Da^x = De^{x \log a} = e^{x \log a} D(x \log a) = e^{x \log a} \log a.$$

Infine, ricordando ancora che $a^x = e^{x \log a}$, si ha

$$= a^x \log a.$$

Teorema (Derivata della funzione inversa)

Siano f una funzione invertibile e $x \in \mathbb{R}$. Se f è derivabile in x, allora la sua inversa f^{-1} è derivabile in $y = f(x)$ e vale la formula

$$\boxed{D\left(f^{-1}\right)(y) = \frac{1}{Df(x)} \qquad \text{con } y = f(x)}$$

Teorema (Derivata della funzione inversa)

Siano f una funzione invertibile e $x \in \mathbb{R}$. Se f è derivabile in x, allora la sua inversa f^{-1} è derivabile in $y = f(x)$ e vale la formula

$$\boxed{D\left(f^{-1}\right)(y) = \frac{1}{Df(x)} \qquad \text{con } y = f(x)}$$

Dimostrazione. Verifichiamo solo la formula.
Poiché $\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x$, si ha

$$D\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = Dx = 1.$$

D'altra parte, per la regola della catena

$$D\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = D\left(f^{-1}\right)(f(x)) \cdot Df(x).$$

Teorema (Derivata della funzione inversa)

Siano f una funzione invertibile e $x \in \mathbb{R}$. Se f è derivabile in x, allora la sua inversa f^{-1} è derivabile in $y = f(x)$ e vale la formula

$$\boxed{D\left(f^{-1}\right)(y) = \frac{1}{Df(x)} \qquad \textit{con } y = f(x)}$$

Dimostrazione. Verifichiamo solo la formula. Confrontando le due uguaglianze si ha

$$D\left(f^{-1}\right)(f(x)) \cdot Df(x) = 1,$$

da cui $D\left(f^{-1}\right)(f(x)) = \dfrac{1}{Df(x)}$. ∎

$$\boxed{D\log x = \frac{1}{x} \qquad x > 0}$$

Dato che $\log x$ è la funzione inversa di e^x, la formula precedente recita

$$D\log y = \frac{1}{e^x} \qquad \text{per } y = e^x,$$

cioè, appunto,

$$D\log y = \frac{1}{y}.$$

$$\boxed{D \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad -1 < x < 1}$$

La formula dell'inversa recita

$$D \arcsin y = \frac{1}{D \sin x} = \frac{1}{\cos x} \qquad \text{per } y = \sin x.$$

Dobbiamo ora esprimere $\cos x$ in funzione di $y = \sin x$. In generale

$$\cos x = \pm\sqrt{1 - \sin^2 x} = \pm\sqrt{1 - y^2}.$$

Poiché come dominio di invertibilità di $\sin x$ si scelgono il primo e quarto quadrante, dobbiamo prendere il coseno positivo, cioè

$$D \arcsin y = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

$$\boxed{D \arctan x = \frac{1}{1+x^2} \qquad x \in \mathbb{R}}$$

La formula dell'inversa recita

$$D \arctan y = \frac{1}{D \tan x} = \frac{1}{1+\tan^2 x} \qquad \text{per } y = \tan x.$$

Ritornando dunque alla variabile y si ha

$$D \arctan y = \frac{1}{1+y^2}.$$

Esercizio 1

Calcolare la derivata di e^{1-x^2}.
Scrivere poi l'equazione della retta tangente in $x = 1$

- Derivata: Usiamo la formula di derivazione della funzione composta

$$\begin{aligned} D\left(e^{1-x^2}\right) &= (D\exp)(1-x^2)\cdot D(1-x^2) \\ &= e^{1-x^2}\cdot(-2x) = -2x\,e^{1-x^2} \end{aligned}$$

- Retta tangente: Poiché $f(1) = e^0 = 1$ e $f'(1) = -2e^0 = -2$, la retta tangente ha equazione

$$y = 1 - 2(x-1).$$

Esercizio 2

Calcolare la derivata di x^x.

Osserviamo che, poiché $x = e^{\log x}$, si ha

$$x^x = \left(e^{\log x}\right)^x = e^{x \log x}.$$

Usiamo dunque la derivata della funzione composta:

$$\begin{aligned} D\left(x^x\right) &= D\left(e^{x\log x}\right) = (D\exp)(x\log x) \cdot D(x\log x) \\ &= e^{x\log x} D(x\log x) \end{aligned}$$

Esercizio 2

Calcolare la derivata di x^x.

Osserviamo che, poiché $x = e^{\log x}$, si ha

$$x^x = \left(e^{\log x}\right)^x = e^{x \log x}.$$

Usiamo dunque la derivata della funzione composta:

$$\begin{aligned} D\left(x^x\right) &= D\left(e^{x \log x}\right) = (D \exp)(x \log x) \cdot D(x \log x) \\ &= e^{x \log x} D(x \log x) \end{aligned}$$

poi la derivata del prodotto:

$$\begin{aligned} &= e^{x \log x}\left(D x \cdot \log x + x \cdot D \log x\right) \\ &= e^{x \log x}\left(\log x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = e^{x \log x}(\log x + 1) \\ &= x^x(\log x + 1) \end{aligned}$$

Esercizio 3

Calcolare la derivata di $\arctan(2-x^2)$.

Usiamo la derivata della funzione composta:

$$\begin{aligned} D\left(\arctan(2-x^2)\right) &= (D\arctan)(2-x^2)\cdot D(2-x^2) \\ &= \frac{1}{1+(2-x^2)^2}\cdot(-2x) \\ &= \frac{-2x}{1+4-4x^2+x^4} = \frac{-2x}{5-4x^2+x^4} \end{aligned}$$