Analisi Matematica 1 e Matematica 1

Derivate elementari e Algebra delle derivate

Anna Lisa Amadori e Benedetta Pellacci

amadori@uniparthenope.it

pellacci@uniparthenope.it

Università di Napoli "Parthenope"

$$\boxed{Dc = 0 \qquad x \in \mathbb{R}}$$

Sia $f(x) = c$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, calcoliamo il rapporto incrementale per $x \in \mathbb{R}$ fissato e $h \neq 0$:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{c - c}{h} = 0.$$

Dunque

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0.$$

$$Dx^\alpha = \alpha\, x^{\alpha-1} \qquad x \text{ nel dominio se } \alpha > 1$$
$$x \neq 0 \text{ se } \alpha < 1$$

Calcoliamo il rapporto incrementale per $x \neq 0$:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h} = \frac{x^\alpha\,[(1+h/x)^\alpha - 1]}{h}$$
$$= \frac{x^\alpha\,[(1+h/x)^\alpha - 1]\cdot 1/x}{h\cdot 1/x} = x^{\alpha-1}\frac{(1+h/x)^\alpha - 1}{h/x}.$$

Dunque

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = x^{\alpha-1}\lim_{h\to 0}\frac{(1+h/x)^\alpha - 1}{h/x}$$

effettuando la sostituzione $t = h/x$ si ha

$$= x^{\alpha-1}\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^\alpha - 1}{t} = \alpha\, x^{\alpha-1}$$

$$Dx^{\alpha} = \alpha\, x^{\alpha-1} \quad x \text{ nel dominio se } \alpha > 1$$
$$x \neq 0 \text{ se } \alpha < 1$$

Invece per $x = 0$ il rapporto incrementale è

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{h^{\alpha} - 0}{h} = h^{\alpha-1}.$$

- Se $\alpha > 1$ si ottiene $\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} h^{\alpha-1} = 0$, cioè $\left.\dfrac{dx^{\alpha}}{dx}\right|_0 = 0 \;\left(= \alpha 0^{\alpha-1}\right)$.
- Se $\alpha < 1$, il limite non è finito e dunque la funzione non è derivabile (può presentarsi una cuspide o un punto a tangente verticale).

$$\boxed{D x^{\alpha} = \alpha\, x^{\alpha-1} \qquad \begin{array}{r} x \text{ nel dominio se } \alpha > 1 \\ x \neq 0 \text{ se } \alpha < 1 \end{array}}$$

Rientrano in questa formula, come casi particolari:

$$\boxed{D x^n = n\, x^{n-1} \qquad (\alpha = n \in \mathbb{N})}$$

Poiché $1/x = x^{-1}$, si ha

$$D 1/x = D x^{-1} = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -1/x^2:$$

$$\boxed{D \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} \qquad (\alpha = -1)}$$

Poiché $\sqrt{x} = x^{1/2}$, si ha

$$D\sqrt{x} = D x^{1/2} = (1/2) \cdot x^{1/2-1} = x^{-1/2}/2 = 1/2x^{1/2} = 1/2\sqrt{x}:$$

$$\boxed{D\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad (\alpha = 1/2)}$$

$$\boxed{D\,e^x = e^x \qquad x \in \mathbb{R}}$$

Calcoliamo il rapporto incrementale:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = e^x\,\frac{e^h-1}{h}.$$

Dunque

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = e^x \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = e^x$$

grazie al relativo limite notevole.

$$\boxed{D\sin x = \cos x \qquad x \in \mathbb{R}}$$

Calcoliamo il rapporto incrementale:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h};$$

utilizzando le formule di addizione si ha

$$= \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h}$$

$$= \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h}.$$

Utilizzando i limiti notevoli per coseno e seno si ha:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \sin x \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}$$

$$= \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x.$$

$$\boxed{D \sin x = \cos x \qquad x \in \mathbb{R}}$$

In modo del tutto simile si ottiene

$$\boxed{D \cos x = -\sin x \qquad x \in \mathbb{R}}$$

Teorema (Algebra delle derivate)

Siano $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ *derivabili in* (a,b)*; allora* $f \pm g$, $f \cdot g$, f/g *(se* $g \neq 0$*) sono derivabili in* (a,b) *e valgono le sequenti regole di calcolo*

$$\boxed{(f \pm g)' = f' \pm g'}$$

$$\boxed{(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'}$$

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}}$$

Dimostriamo solo la seconda formula.

Dimostrazione. Per verificare la seconda formula

$$\boxed{(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'}$$

calcoliamo il rapporto incrementale:

$$\frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)}{h} =$$

$$\frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x+h)\cdot g(x)}{h}$$

$$+\frac{f(x+h)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x)}{h} =$$

$$f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + \frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x)$$

Dimostrazione. Per verificare la seconda formula

$$\boxed{(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'}$$

calcoliamo il rapporto incrementale:

$$\frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} =$$

$$f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + \frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x)$$

Ma, poiché per ipotesi f e g sono derivabili:

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = g'(x),$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x).$$

Inoltre f è continua (in quanto derivabile), pertanto

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x).$$

Dimostrazione. Per verificare la seconda formula

$$\boxed{(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'}$$

calcoliamo il rapporto incrementale:

$$\frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)}{h} =$$

$$f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + \frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x)$$

Infine l'algebra dei limiti dà

$$(f\cdot g)'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\left[f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + \frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x)\right]$$

$$= f(x)\cdot g'(x) + f'(x)\cdot g(x).$$

■

Osservazione

Dall'Algebra delle derivate si deducono (come casi particolari) queste regole di calcolo:

$$\boxed{(f+c)' = f' \qquad (c \text{ costante})}$$

$$\boxed{(c\cdot f)' = c\cdot f' \qquad (c \text{ costante})}$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} D\tan x &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ &= 1+\tan^2 x \qquad x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi \end{aligned}}$$

Poiché $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, possiamo calcolarne la derivata utilizzando la formula per la derivata del rapporto.

$$\begin{aligned} D\tan x = D\frac{\sin x}{\cos x} &= \frac{D\sin x \cdot \cos x - \sin x \cdot D\cos x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

o, anche,

$$= \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$$

Esercizio 1

Calcolare la derivata di $x^3 - 2x^5 + 7x - 3$.
Scrivere poi l'equazione della retta tangente in $x = 0$

- Derivata: Per l'algebra delle derivate

$$\begin{aligned} D\left(x^3 - 2x^5 + 7x - 3\right) &= Dx^3 - 2\,Dx^5 + 7\,Dx - D(3) \\ &= 3x^2 - 2 \cdot 5x^4 + 7 \cdot 1 - 0 \\ &= 3x^2 - 10x^4 + 7 \end{aligned}$$

- Retta tangente: Poiché $f(0) = -3$ e $f'(0) = 7$, la retta tangente ha equazione

$$y = -3 + 7x.$$