Analisi Matematica 1 e Matematica 1

Continuità e punti di non derivabilità

Anna Lisa Amadori e Benedetta Pellacci

amadori@uniparthenope.it

pellacci@uniparthenope.it

Università di Napoli "Parthenope"

Teorema (Ogni funzione derivabile è continua)

Siano $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ e $x_o\in(a,b)$. Se f è derivabile in x_o, allora f è continua in x_o.

Dimostrazione. Vogliamo dimostrare che f è continua, ovvero che

$$\lim_{x\to x_o} f(x)-f(x_o)=0$$

e sappiamo per ipotesi che f è derivabile, cioè che

$$\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=f'(x_o)\in\mathbb{R}.$$

Ora

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_o} f(x)-f(x_o) &= \lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}(x-x_o)\\ &= f'(x_o)\cdot 0=0\ .\end{aligned}$$

per l'algebra dei limiti.

Teorema (Ogni funzione derivabile è continua)

Siano $f:(a,b)\rightarrow\mathbb{R}$ e $x_o\in(a,b)$. Se f è derivabile in x_o, allora f è continua in x_o.

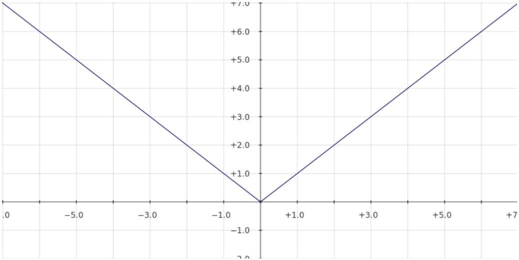
Vale il viceversa? In altri termini, è vero che ogni funzione continua è derivabile?

NO!

Elenchiamo alcuni controesempi di funzioni continue ma non derivabili.

Punto angoloso

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = |x|$$

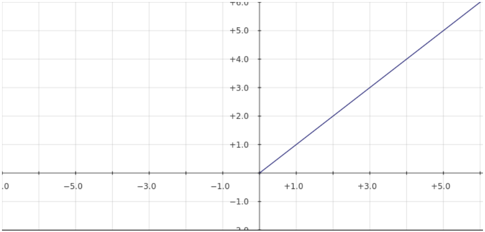


- è continua in $x = 0$, poichè $\lim_{x\to 0} |x| = 0 \ \big(= |0|\big)$,
- non è derivabile in $x = 0$, poichè $\dfrac{|x| - |0|}{x} = \dfrac{|x|}{x}$,

sicché
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|-|0|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1,$$
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|-|0|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1.$$

Punto angoloso

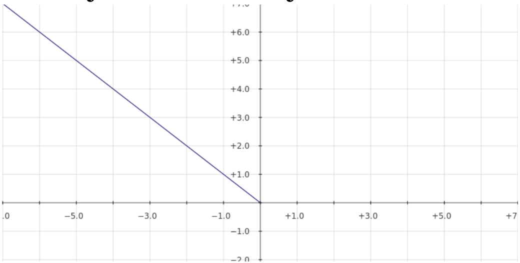
$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad f(x)=|x|$$



Se consideriamo solo la porzione di grafico nel semipiano $x>0$, c'è retta tangente di equazione $y=x$.

Punto angoloso

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = |x|$$



Se consideriamo solo la porzione di grafico nel semipiano $x > 0$, c'è retta tangente di equazione $y = x$.
Invece nel semipiano $x < 0$ la retta tangente ha equazione $y = -x$.

Punto angoloso

Parliamo di punto angoloso quando il limite da destra e da sinistra del rapporto incrementale sono entrambi finiti, ma diversi.

In queste situazioni, può essere utile introdurre il concetto di

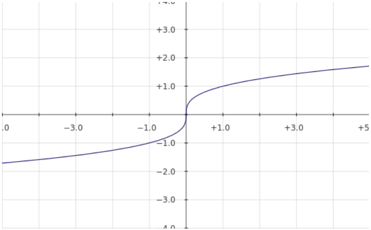
derivata destra $D^+ f(x_o) = \lim_{x \to x_o^+} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_0}$

derivata sinistra $D^- f(x_o) = \lim_{x \to x_o^-} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_0}$

Per una funzione derivabile, derivata destra e sinistra coincidono, mentre sono diverse (ma entrambe finite) quando c'è un punto angoloso.

Punto a tangente verticale

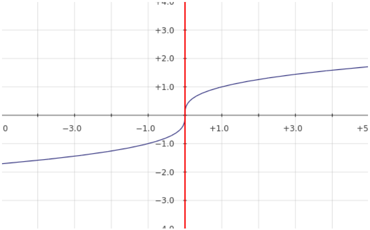
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sqrt[3]{x}$$



- è continua in $x = 0$, poichè
$$\lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x} = 0 \ (= \sqrt[3]{0})$$
- non è derivabile in $x = 0$, poichè
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{1/3}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{2/3}} = +\infty$$

Punto a tangente verticale

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sqrt[3]{x}$$

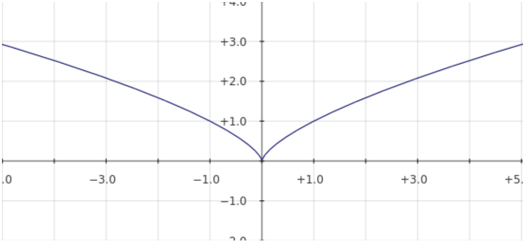


In effetti la retta tangente esiste, ma è verticale, cioè appunto ha coefficiente angolare infinito.

Parliamo di punto a tangente verticale quando il limite del rapporto incrementale esiste, ma è infinito.

Cuspide

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\qquad f(x)=\sqrt[3]{x^2}$$



- è continua in $x=0$, poiché $\lim_{x\to0}\sqrt[3]{x^2}=0\ (=\sqrt[3]{0^2})$,
- non è derivabile in $x=0$, poiché

$$\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{0^2}}{x}=\frac{x^{2/3}}{x}=\frac{1}{x^{1/3}},$$

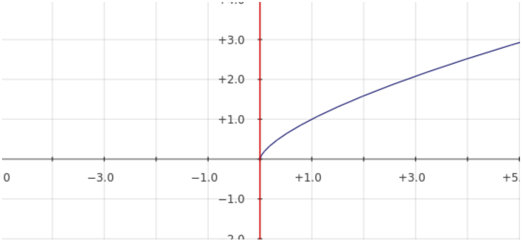
sicché

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{0^2}}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^{1/3}}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{0^2}}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x^{1/3}}=-\infty.$$

Cuspide

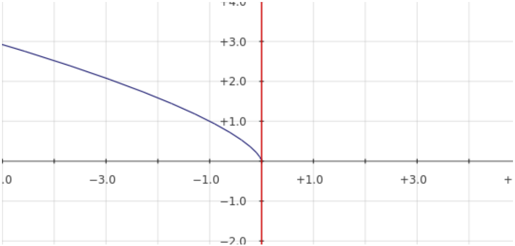
$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad f(x)=\sqrt[3]{x^2}$$



Se consideriamo solo la porzione di grafico nel semipiano $x>0$, la retta tangente è verticale e il grafico è crescente.

Cuspide

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sqrt[3]{x^2}$$



Se consideriamo solo la porzione di grafico nel semipiano $x > 0$, la retta tangente è verticale e il grafico è crescente.

Anche nel semipiano $x < 0$ la retta tangente è verticale, ma il grafico è decrescente.

Parliamo di punto di cuspide quando derivate destra e sinistra sono l'una $+\infty$ e l'altra $-\infty$.

Esercizio 1

Determinare l'insieme di derivabilità della funzione

$$f(x) = \left|x^3(x-2)\right|$$

e classificare gli eventuali punti di non derivabilità.

Studiamo prima il segno di $x^3(x-2)$:

x		0		2	
x^3	$-$		$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$+$
prodotto	$+$		$-$		$+$

$$f(x) = \left|x^3(x-2)\right| = \begin{cases} x^3(x-2) & x \le 0 \text{ o } x \ge 2, \\ -x^3(x-2) & 0 < x < 2. \end{cases}$$

Esercizio 1

Determinare l'insieme di derivabilità della funzione

$$f(x) = \left|x^3(x-2)\right|$$

e classificare gli eventuali punti di non derivabilità.

Dunque l'algebra delle derivate assicura che $f(x)$ è derivabile per $x \neq 0, 2$ con

$$f'(x) = \begin{cases} D(x^3(x-2)) = D(x^4-2x^3) = 4x^3-6x^2 \\ \qquad\qquad \text{se } x<0 \text{ o } x>2, \\ D(-x^3(x-2)) = -D(x^3(x-2)) = -4x^3+6x^2 \\ \qquad\qquad \text{se } 0<x<2. \end{cases}$$

Esercizio 1

Determinare l'insieme di derivabilità della funzione

$$f(x) = \left|x^3(x-2)\right|$$

e classificare gli eventuali punti di non derivabilità.

In $x = 0$, valutiamo il rapporto incrementale

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{\left|x^3(x-2)\right|}{x} = \begin{cases} x^2(x-2) & x < 0, \\ -x^2(x-2) & 0 < x < 2. \end{cases}$$

Dunque

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 0 = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x}$$

e $f(x)$ <u>è derivabile</u> in $x = 0$.

Esercizio 1

Determinare l'insieme di derivabilità della funzione

$$f(x) = \left|x^3(x-2)\right|$$

e classificare gli eventuali punti di non derivabilità.

In $x = 2$, valutiamo il rapporto incrementale

$$\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{\left|x^3(x-2)\right|}{x-2} = \begin{cases} x^3 & x > 2, \\ -x^3 & 0 < x < 2. \end{cases}$$

Dunque

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = 8 \qquad \lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = -8$$

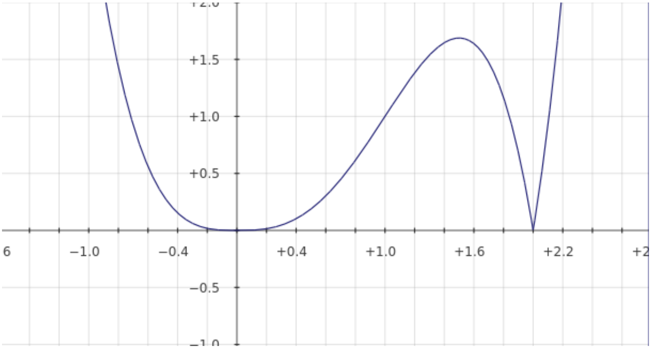
e $f(x)$ non è derivabile in $x = 2$, ma ha un punto angoloso.

Esercizio 1

Determinare l'insieme di derivabilità della funzione

$$f(x) = \left|x^3(x-2)\right|$$

e classificare gli eventuali punti di non derivabilità.



Esercizio 2

Verificare che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x) & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è continua, ma non derivabile, in $x = 0$.

Continuità: dobbiamo verificare che

$$\lim_{x \to 0} x \sin(1/x) = 0.$$

Questo è noto poiché x è infinitesima, mentre $\sin(1/x)$, sebbene non abbia limite per $x \to 0$, è limitata $\big(|\sin(1/x)| \leq 1\big)$.

Esercizio 2

Verificare che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x) & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è continua, ma non derivabile, in $x = 0$.

Non derivabilità: valutiamo il rapporto incrementale

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{x\sin(1/x) - 0}{x} = \sin(1/x).$$

Dunque <u>non esiste</u>

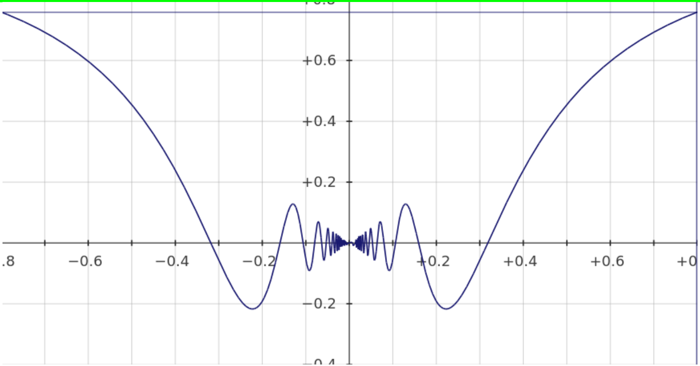
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \sin(1/x).$$

Esercizio 2

Verificare che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x) & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è continua, ma non derivabile, in $x = 0$.



Esercizio 3

Verificare che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è continua e derivabile, in $x = 0$.

Continuità: dobbiamo verificare che

$$\lim_{x \to 0} x^2 \sin(1/x) = 0.$$

Come nell'esercizio precedente, segue dal fatto che x^2 è infinitesima, mentre $\sin(1/x)$, sebbene non abbia limite per $x \to 0$, è limitata $\left(|\sin(1/x)| \leq 1\right)$.

Esercizio 3

Verificare che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è continua e derivabile, in $x = 0$.

Derivabilità: valutiamo il rapporto incrementale

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{x^2 \sin(1/x) - 0}{x} = x \sin(1/x).$$

Dunque

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} x \sin(1/x) = 0$$

Esercizio 3

Verificare che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è continua e derivabile, in $x = 0$.