Analisi Matematica 1 e Matematica 1

Derivata: definizione

Anna Lisa Amadori e Benedetta Pellacci

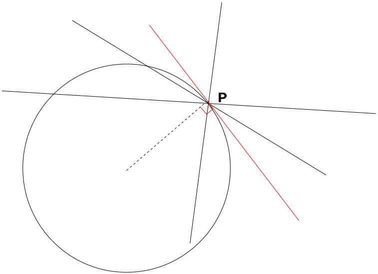
amadori@uniparthenope.it

pellacci@uniparthenope.it

Università di Napoli "Parthenope"

Che cos'è la tangente?

Se la curva è una **circonferenza**, risponde la geometria elementare.

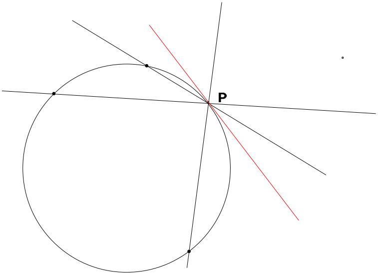


Definizione (1)

È l'unica retta passante per P e perpendicolare al raggio per P.

Che cos'è la tangente?

Se la curva è una **circonferenza**, risponde la geometria elementare.

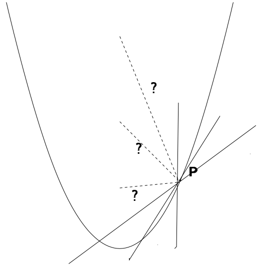


Definizione (2)

È l'unica retta passante per P che non interseca la curva in altri punti.

Che cos'è la tangente?

Se la curva è una **parabola**, cosa ci dice la geometria elementare?



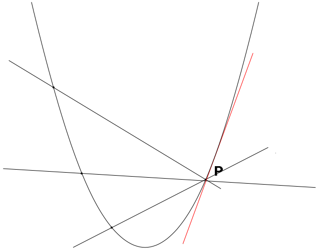
Definizione (1)

È l'unica retta passante per P e perpendicolare al raggio per P.

La definizione 1 non si applica perché la parabola non ha raggi!

Che cos'è la tangente?

Se la curva è una **parabola**, cosa ci dice la geometria elementare?



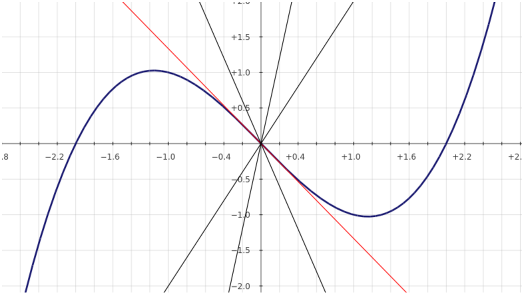
Definizione (2)

È l'unica retta passante per P che non interseca la curva in altri punti.

La definizione 2 vale ancora.

Che cos'è la tangente?

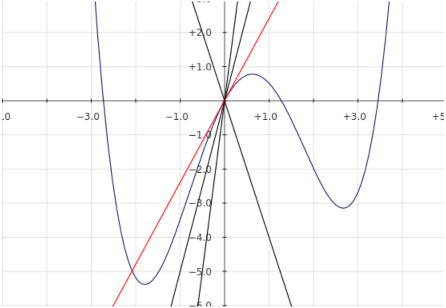
La Definizione 2 si applica a tutte le coniche.
Ma non si può utilizzare per qualunque curva che sia il grafico di una funzione!



Ci sono molte rette per P che non intersecano la curva in altri punti.

L'intuito ci dice che quella in rosso è la retta tangente.

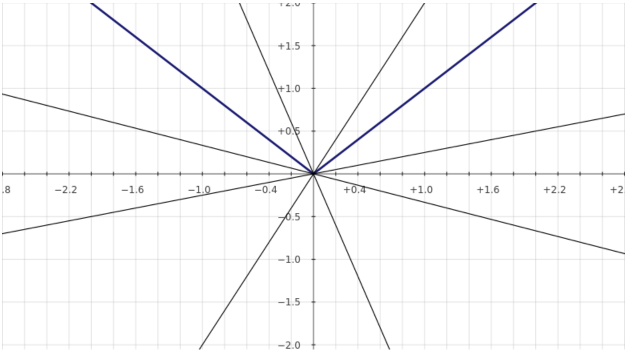
Che cos'è la tangente?



Anche in questo caso, ci sono molte rette per P che non intersecano la curva in altri punti. L'intuito ci dice nessuna di queste è tangente.

Al contrario, la retta in rosso è tangente, ma interseca la curva anche in altri punti!

Che cos'è la tangente?

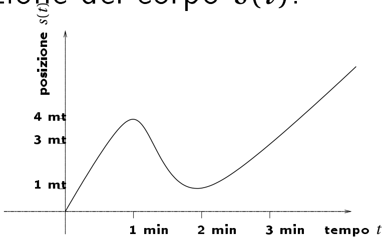


Anche in questo caso, ci sono molte rette per P che non intersecano la curva in altri punti.

L'intuito ci dice nessuna di queste è tangente e che la retta tangente non esiste.

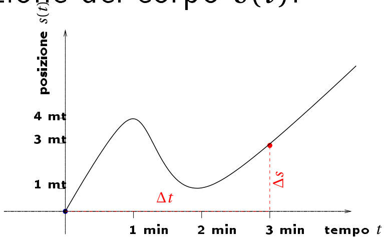
Che cos'è la velocità?

Il moto di un corpo è descritto mediante la sua **legge oraria**, cioè la funzione che al tempo t associa la posizione del corpo $s(t)$.



Che cos'è la velocità?

Il moto di un corpo è descritto mediante la sua **legge oraria**, cioè la funzione che al tempo t associa la posizione del corpo $s(t)$.

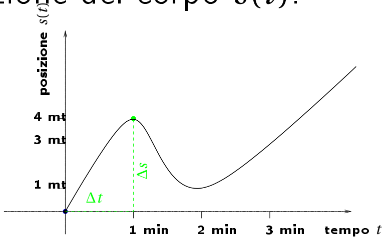


Nei primi 3 minuti, il corpo si sposta da $s(0) = 0$ a $s(3) = 3$. Qual è la sua velocità? La fisica dice

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(3) - s(0)}{3 - 0} = 1 \text{ metro al minuto.}$$

Che cos'è la velocità?

Il moto di un corpo è descritto mediante la sua **legge oraria**, cioè la funzione che al tempo t associa la posizione del corpo $s(t)$.

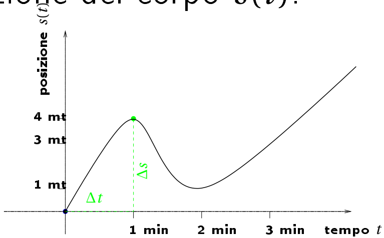


Nel primo minuto il corpo si muove da $s(0) = 0$ a $s(1) = 4$, con velocità

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(1) - s(0)}{1 - 0} = 4 \text{ metri al minuto.}$$

Che cos'è la velocità?

Il moto di un corpo è descritto mediante la sua **legge oraria**, cioè la funzione che al tempo t associa la posizione del corpo $s(t)$.



La velocità dipende dall'intervallo di tempo in cui la calcoliamo.

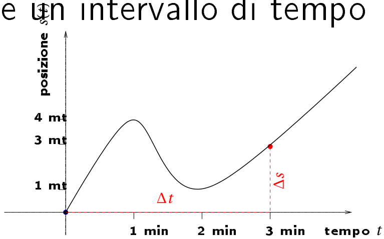
Per la precisione, noi abbiamo appena calcolato la velocità media nell'intervallo Δt.

Che cos'è la velocità?

Come calcolereste la velocità istantanea in $t = 0$?

Andremo a prendere un intervallo di tempo "piccolo":

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

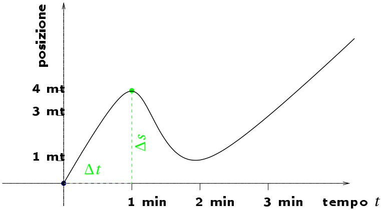


Che cos'è la velocità?

Come calcolereste la velocità istantanea in $t = 0$?

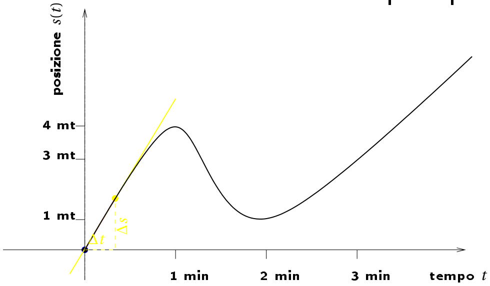
Andremo a prendere un intervallo di tempo "piccolo":

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$



Che cos'è la velocità?

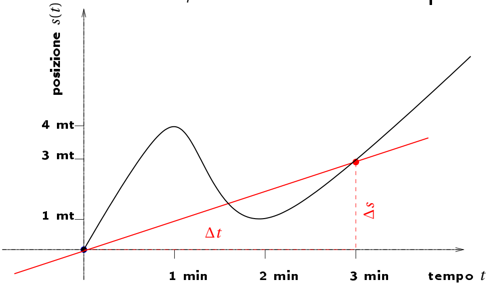
Come calcolereste la velocità istantanea in $t = 0$?
Andremo a prendere un intervallo di tempo "piccolo":



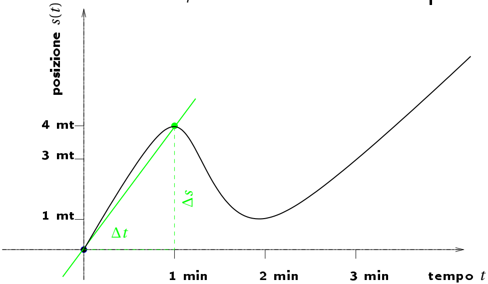
$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

La **velocità istantanea** in 0 è il limite della velocità media, al tendere a zero di Δt.
La sua definizione rigorosa fa uso del concetto di derivata.

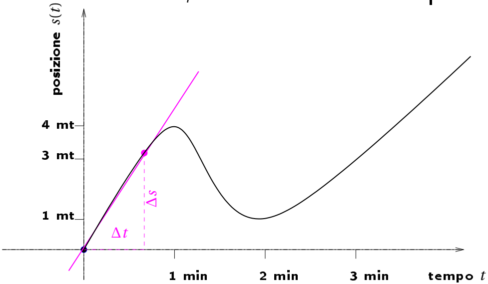
La velocità media nell'intervallo di tempo fra 0 e t rappresenta il coefficiente angolare della retta per i punti $(0, s(0))$ e $(t, s(t))$.
Al tendere a zero di Δt, come cambia questa retta?



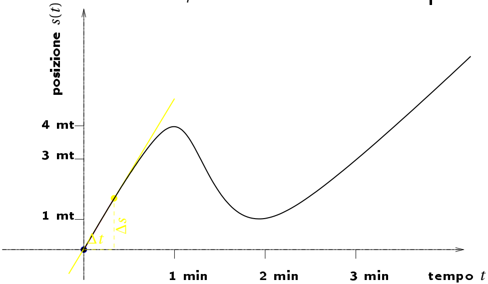
La velocità media nell'intervallo di tempo fra 0 e t rappresenta il coefficiente angolare della retta per i punti $(0, s(0))$ e $(t, s(t))$.
Al tendere a zero di Δt, come cambia questa retta?



La velocità media nell'intervallo di tempo fra 0 e t rappresenta il coefficiente angolare della retta per i punti $(0, s(0))$ e $(t, s(t))$.
Al tendere a zero di Δt, come cambia questa retta?

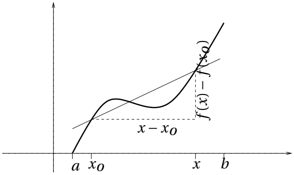


La velocità media nell'intervallo di tempo fra 0 e t rappresenta il coefficiente angolare della retta per i punti $(0, s(0))$ e $(t, s(t))$.
Al tendere a zero di Δt, come cambia questa retta?



Si avvicina alla "retta tangente"!
La velocità istantanea -e dunque quella che chiameremo "derivata"- rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente.

Siano $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $x_o \in (a, b)$ e $x \neq x_o$

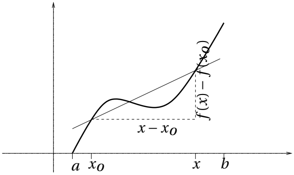


chiamiamo rapporto incrementale di f fra x_o e x:

$$\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$$

Rappresenta il coefficiente angolare della retta secante il grafico nei punti $(x_o, f(x_o))$ e $(x, f(x))$.

Siano $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $x_o\in(a,b)$ e $x\neq x_o$



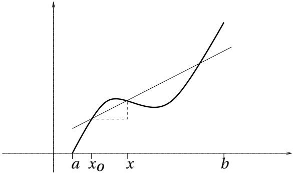
chiamiamo rapporto incrementale di f fra x_o e x:

$$\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$$

Definizione (Funzione derivabile)

La funzione f si dice derivabile nel punto x_o se esiste, finito, il limite $\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$.

Siano $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $x_o \in (a, b)$ e $x \neq x_o$



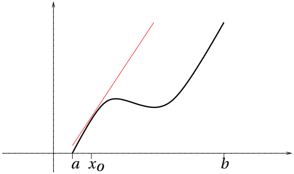
chiamiamo rapporto incrementale di f fra x_o e x:

$$\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$$

Definizione (Funzione derivabile)

La funzione f si dice derivabile nel punto x_o se esiste, finito, il limite $\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$.

Siano $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $x_o\in(a,b)$ e $x\neq x_o$



chiamiamo rapporto incrementale di f fra x_o e x:

$$\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$$

Definizione (Funzione derivabile)

La funzione f si dice derivabile nel punto x_o se esiste, finito, il limite $\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$.

Definizione (Funzione derivabile e derivata)

La funzione f si dice derivabile nel punto x_o se esiste, finito, il limite $\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$.

In tal caso, il valore di tale limite si dice derivata di f in x_o e si indica con uno dei simboli seguenti:

$$f'(x_o) = Df(x_o) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_o} = \dot{f}(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}.$$

N.B. La derivata è dunque un numero reale, che si ottiene calcolando un limite.

Abbiamo visto che tale numero è collegato alla tangente. Come?

Definizione (Retta tangente)

Si dice che il grafico della funzione f ammette tangente nel punto x_o se f è derivabile in x_o.
In tal caso, si definisce retta tangente al grafico di f in x_o la retta di equazione

$$y = f(x_o) + f'(x_o)\,(x - x_o)$$

Questa è appunto la retta di coefficiente angolare $f'(x_o)$ passante per il punto $(x_0, f(x_o))$.

Si può anche parlare di funzione derivabile **in un intervallo**, precisamente:

Definizione

La funzione f si dice derivabile nell'intervallo (a, b) se essa è derivabile nel punto x, per ogni $x \in (a, b)$.

Talvolta, nel limite che definisce la derivata, è conveniente mettere in evidenza l'incremento della variabile indipendente, effettuando il cambiamento di variabile $h = x - x_o$. Si ottiene così

$$f'(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \lim_{h \to o} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h}.$$

Con questa notazione, x_o risulta ridondante e si scrive piuttosto la definizione alternativa:

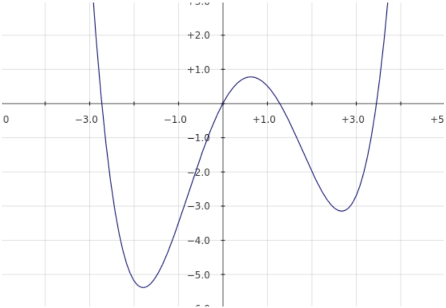
Definizione

La funzione f si dice derivabile nel punto x se esiste, finito, il limite $\lim_{h \to o} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

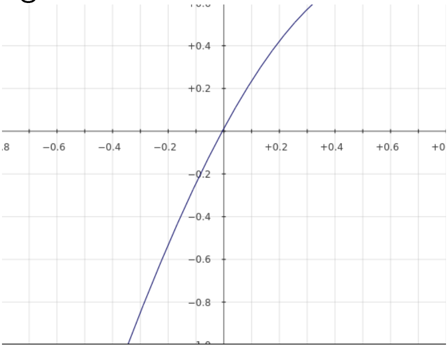
Attraverso gli esempi, ci siamo accorti che la derivata si può interpretare come

- tangente: $f'(x_o)$ è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico in x_o. Si costruisce come limite del coefficiente angolare della retta secante il grafico.
- velocità: $f'(x_o)$ esprime la velocità di variazione del grafico in x_o. Si costruisce come limite del rapporto fra l'innalzamento verticale del grafico $(f(x) - f(x_o))$ ed il suo incremento orizzontale $(x - x_o)$.
- permette di dare la miglior approssimazione lineare del grafico vicino a x_o.

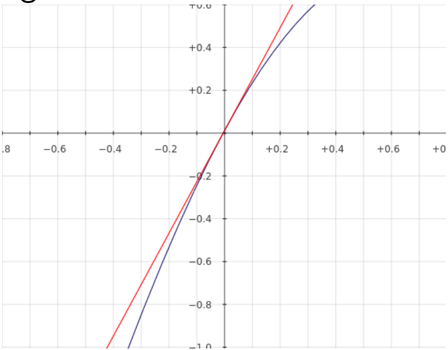
Immaginiamo di studiare un fenomeno la cui legge $y = f(x)$ è particolarmente complessa



Immaginiamo di studiare un fenomeno la cui legge $y = f(x)$ è particolarmente complessa Ci interessa però solo per valori della x vicini ad un certo x_o. Zoomando il grafico otteniamo:

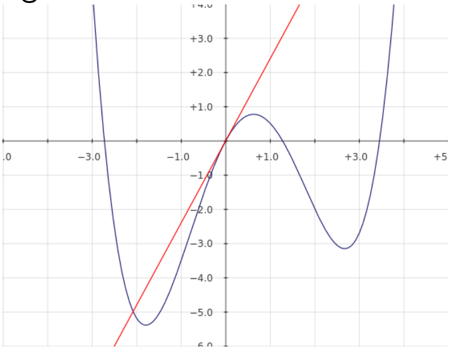


Immaginiamo di studiare un fenomeno la cui legge $y = f(x)$ è particolarmente complessa Ci interessa però solo per valori della x vicini ad un certo x_o. Zoomando il grafico otteniamo:



È dunque accettabile usare una legge semplificata, che sia efficace vicino ad x_o

Immaginiamo di studiare un fenomeno la cui legge $y = f(x)$ è particolarmente complessa Ci interessa però solo per valori della x vicini ad un certo x_o. Zoomando il grafico otteniamo:



È dunque accettabile usare una legge semplificata, che sia efficace vicino ad x_o, anche se è grossolana lontano da x_o.

In prima approssimazione, scegliamo una legge lineare

$$y = q + m(x - x_o)$$

e siamo disposti a trascurare gli errori fino all'ordine di $(x - x_o)$, dunque richiediamo che

$$f(x) = q + m(x - x_o) + \varepsilon(x)\,(x - x_o),$$

dove $\varepsilon(x)$ indica un infinitesimo per $x \to x_o$, cioè una funzione continua con $\varepsilon(x_o) = 0$.

In prima approssimazione, scegliamo una legge lineare

$$y = q + m(x - x_o)$$

e siamo disposti a trascurare gli errori fino all'ordine di $(x - x_o)$, dunque richiediamo che

$$f(x) = q + m(x - x_o) + \varepsilon(x)\,(x - x_o),$$

dove $\varepsilon(x)$ indica un infinitesimo per $x \to x_o$, cioè una funzione continua con $\varepsilon(x_o) = 0$.

Calcolandola in $x = x_o$ otteniamo

$$f(x_o) = q.$$

In prima approssimazione, scegliamo una legge lineare

$$y = q + m(x - x_o)$$

e siamo disposti a trascurare gli errori fino all'ordine di $(x - x_o)$, dunque richiediamo che

$$f(x) = q + m(x - x_o) + \varepsilon(x)\,(x - x_o),$$

dove $\varepsilon(x)$ indica un infinitesimo per $x \to x_o$, cioè una funzione continua con $\varepsilon(x_o) = 0$.

Per stabilire il valore di m, osserviamo che

$$m = \frac{f(x) - q}{x - x_o} + \varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} + \varepsilon(x).$$

Passando infine al limite per $x \to x_o$ otteniamo:

$$m = \lim_{x \to x_o} \left(\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} + \varepsilon(x) \right) = f'(x_o)$$

La legge $f(x)$ ammette un'approssimazione lineare in x_o se, e solo se, è derivabile in x_o.
In tal caso, la retta tangente al grafico è la miglior approssimazione lineare, cioè

$$f(x) = f(x_o) + f'(x_o)\,(x - x_o) + \varepsilon(x)\,(x - x_o)$$

Vedremo che il calcolo differenziale permette anche di dare approssimazioni più raffinate.
Potremo approssimare il grafico con un polinomio di grado n, compiendo un errore trascurabile rispetto a $(x - x_o)^n$.