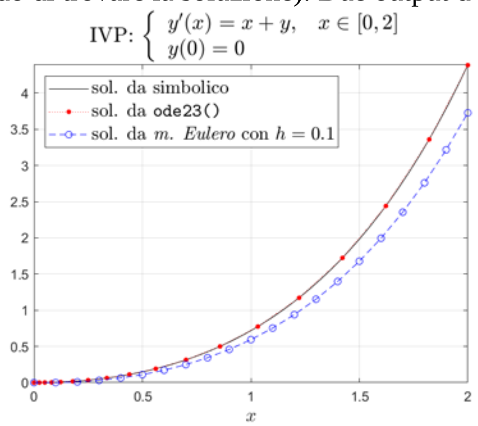
Esercizi e Laboratorio

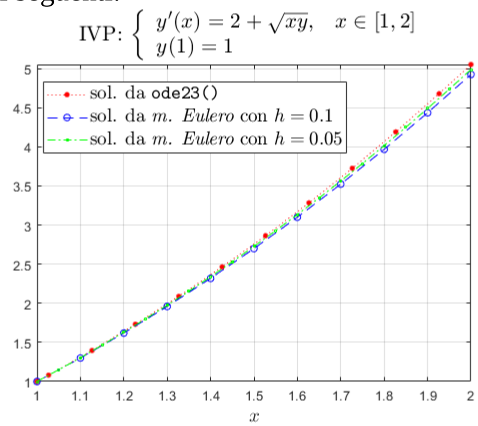
ACS_P1_4g

1. Implementare in una function il *metodo di Eulero*, con passo fisso *h*=0.1, ed applicarlo ai seguenti IVP:
   - $y'(x) = x + y, \qquad x\in[0, 2], \qquad y(0) = 0$
   - $y'(x) = x + \sin(y), \qquad x\in[0, 0.5], \qquad y(0) = 1$
   - $y'(x) = 2 + \mathrm{sqrt}(xy), \qquad x\in[1, 2], \qquad y(1) = 1$

   Confrontare graficamente la soluzione numerica ottenuta con quella ottenuta mediante la funzione numerica **`ode23()`** e con la soluzione analitica ottenuta mediante il *Symbolic Math Toolbox* (talvolta il simbolico non è in grado di trovare la soluzione). Due output d'esempio sono i seguenti:



Soluzione simbolica trovata



Soluzione simbolica non trovata

   Cosa succede se si aggiunge la soluzione del *metodo di Eulero*, con passo fisso *h*=0.05, o minore?

2. Implementare in una function il *metodo Backward Eulero**, con passo fisso *h*, ed applicarlo ai seguenti IVP:

   $$y'(x) = \lambda y + (1-\lambda)\cos(x) - (1+\lambda)\sin(x), \qquad x\in[0, 5], \qquad y(0) = 1$$

   * usando la funzione **`fzero()`** per risolvere, ad ogni passo, l'equazione non lineare in y_{k+1}.

   dove
   - $\lambda = -10, \qquad h = 0.5,$
   - $\lambda = -50, \qquad h = 0.1,$
   - $\lambda = -50, \qquad h = 0.01.$

   Confrontare graficamente la soluzione numerica ottenuta con quella analitica $y(x) = \sin(x) + \cos(x)$.
   Confrontare anche i risultati ottenuti dal *metodo di Eulero* e dalla funzione MATLAB **`ode23()`**.
   Produrre in un'altra figura (in scala semilogaritmica con **`semilogy()`**) il grafico degli errori relativi calcolati come

   $$\mathrm{ER}_{\mathrm{metodo}} = |y(x_i) - y_i| / |y(x_i)|$$

   dove (x_i, y_i) sono rispettivamente i nodi e le approssimazioni numeriche restituite da un metodo, e $y(x_i)$ i valori della soluzione analitica nei nodi. Commentare i risultati ottenuti.

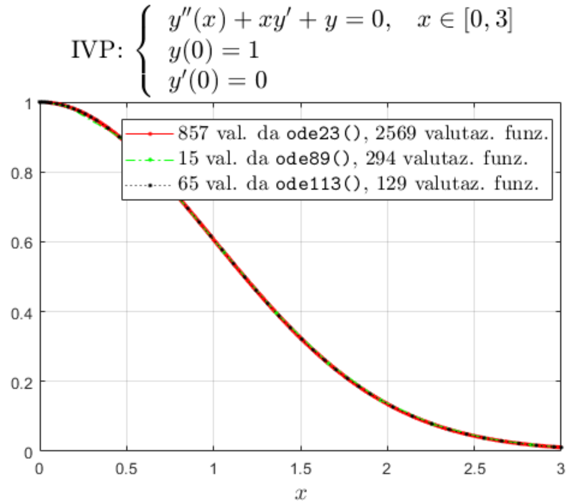
3. Risolvere mediante gli *ODE solver* di MATLAB **`ode23()`**, **`ode89()`** e **`ode113()`** il seguente IVP del 2° ordine:

   $$y'' + xy' + y = 0, \qquad x\in[0, 3]$$
   $$y(0) = 1$$
   $$y'(0) = 0$$

   Specificare le opzioni ai solver come segue:

```
options=odeset('RelTol',1e-8,'AbsTol',1e-10,'Stats','on');
```

   Visualizzare graficamente i risultati numerici, ad esempio, come segue.



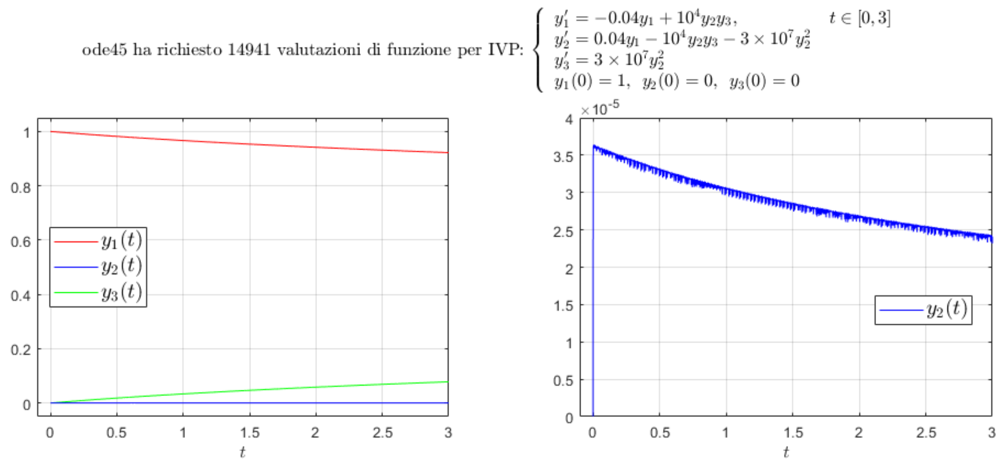
dove le informazioni visualizzate sono restituite nella **`struct sol`**, parametro di uscita della funzione, come ad esempio:

```
sol = ode23(...);
```

4. Risolvere mediante gli *ODE solver* **`ode23`**, **`ode45`**, **`ode15s`** di MATLAB il seguente *problema stiff* nell'intervallo $t\in[0, 3]$:

$$\begin{cases} y_1' = -0.04 y_1 + 10^4 y_2 y_3 \\ y_2' = +0.04 y_1 - 10^4 y_2 y_3 - 3\times 10^7 y_2^2 \\ y_3' = +3\times 10^7 y_2^2 \\ y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = 0 \\ y_3(0) = 0 \end{cases}$$

visualizzando il numero di valutazioni di funzione usate da ogni *ODE solver*, le tre soluzioni e in un'altra finestra solo la soluzione $y_2(t)$. Si riporta, di seguito, una figura d'esempio.



5. Confrontare, anche rispetto al numero di valutazioni di funzione, le soluzioni ottenute dagli *ODE solver* **`ode45`** e **`ode15s`** di MATLAB per il seguente problema (*oscillatore di Van der Pol*):

$$\begin{cases} y'' - \mu\left(1-y^2\right)y' + y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

negli intervalli specificati per ogni valore del parametro μ:

- μ=1 $t\in[0, 20]$
- μ=200 $t\in[0, 1000]$
- μ=1000 $t\in[0, 5000]$

6. Risolvere mediante gli *ODE solver* di MATLAB **`bvp4c()`** e **`bvp5c()`** i seguenti BVP (il primo lineare ed il secondo non lineare):

(a)	(b)
$y'' + y = x^2, \quad x \in]0, 1[$	$y'' = 0.5(x + y + 1)^3, \quad x \in]0, 1[$
$y(0) = 0, \quad y(1) = 1$	$y(0) = 0, \quad y(1) = 0$

aggiungendo le seguenti opzioni: `options=bvpset('RelTol',1e-10,'Stats','on');`.
Implementare in una function il *metodo con le Differenze Finite* su **`n+1`** nodi, dove **`n=8, 20, 50, 100`**, per risolvere i precedenti BVP.
Per tutti i risultati numerici confrontarne l'accuratezza con la soluzione analitica, calcolando nei nodi il massimo Errore Assoluto (EA) ed il massimo Errore Relativo (ER) come segue:

$$\mathrm{EA}_{\mathrm{metodo}} = |y(x_i) - y_i|$$

$$\mathrm{ER}_{\mathrm{metodo}} = |y(x_i) - y_i| / |y(x_i)|$$

Per il problema (a) la soluzione analitica può essere ottenuta mediante la funzione simbolica **`dsolve()`**; per il problema (b) la soluzione analitica è: $y(x) = 2/(2-x) - x - 1$.