Laurea Magistrale in STN

Applicazioni di Calcolo Scientifico e Laboratorio di ACS

(12 cfu)

prof. Mariarosaria Rizzardi

Centro Direzionale di Napoli – Isola C4
stanza: n. 423 – Lato Nord, 4° piano
tel.: 081 547 6545
email: mariarosaria.rizzardi@uniparthenope.it

Argomento trattato

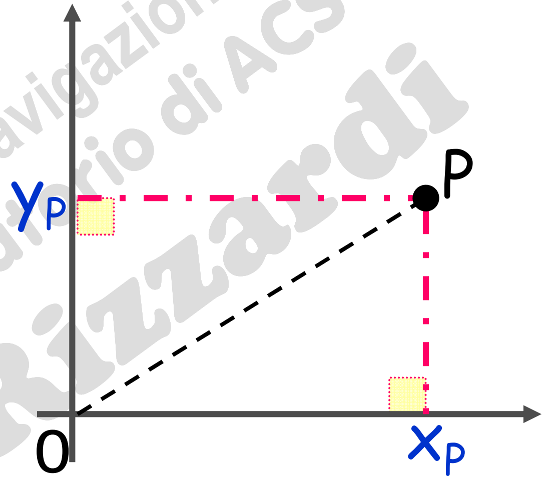
- **Brevi note sui numeri complessi**

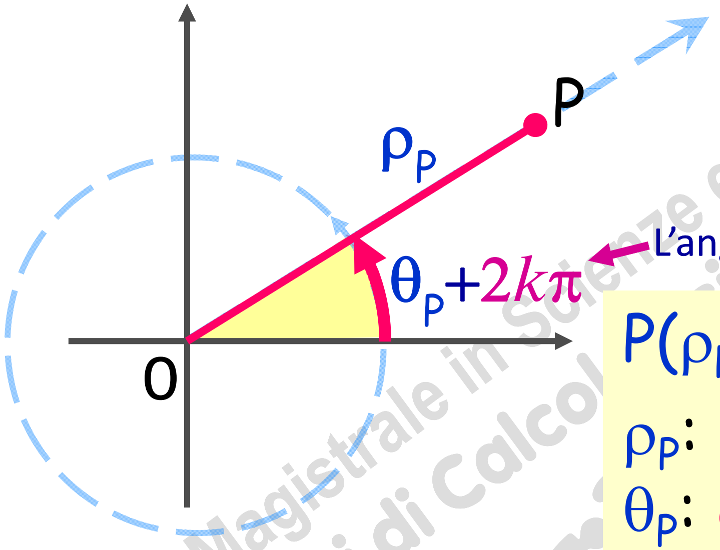
Sistemi di coordinate nel piano

$P(x_P, y_P)$ coordinate cartesiane:

x_P: ascissa di P

y_P: ordinata di P



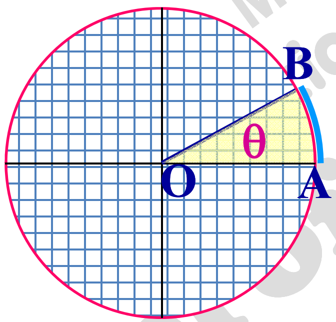


L'angolo è definito a meno di multipli di 2π (un angolo giro)

$P(\rho_P, \theta_P)$ coordinate polari:

ρ_P: coordinata radiale di P

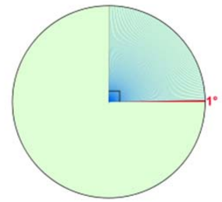
θ_P: coordinata angolare di P



un angolo θ può essere misurato in: gradi o in radianti.

1 grado: è la 90ª parte di un angolo retto.

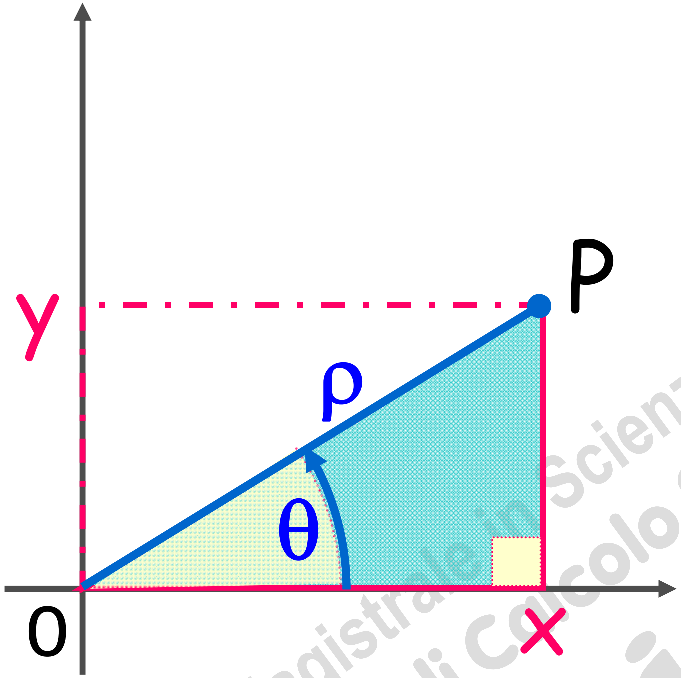
1 radiante: è l'angolo sotteso da un arco di lunghezza pari al raggio del cerchio. θ in radianti è calcolato come rapporto tra la lunghezza dell'arco **AB**, ed il raggio **OA** del cerchio.



per passare da deg() a rad() e viceversa: $\text{deg}(\theta) : 180 = \text{rad}(\theta) : \pi$

Passare da un sistema di coordinate ad un altro

(x,y) coordinate cartesiane e $[\rho,\theta]$ coordinate polari di P

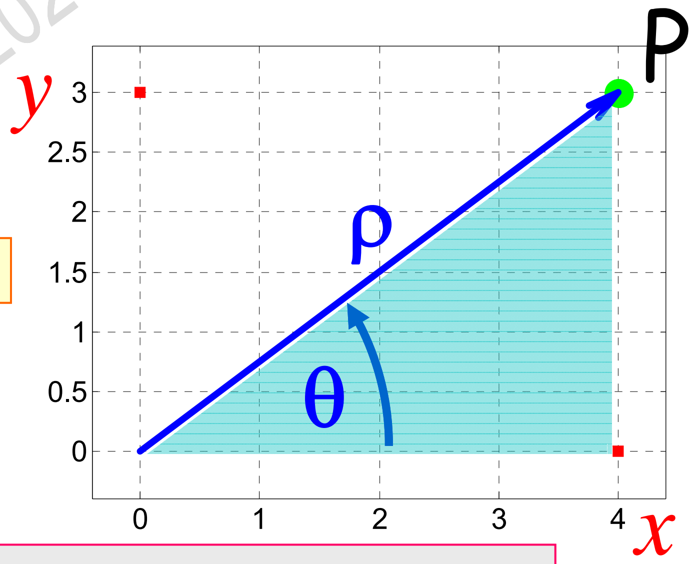


$$x = \rho \cos\theta \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y = \rho \sin\theta \qquad \theta = \arctan\frac{y}{x}$$

```
P=[4,3];   x=P(1);   y=P(2);
figure; plot(P(1),P(2),'og')
axis equal; hold on
rho=sqrt(x^2+y^2);  theta=atan(y/x);
plot([x 0],[0 y],'sr')
quiver(0,0,rho*cos(theta),rho*sin(theta),0)
```

```
theta=atan2(y,x);
```



Quiz: che differenza c'è tra atan(…) e atan2(…)?

Numeri Complessi

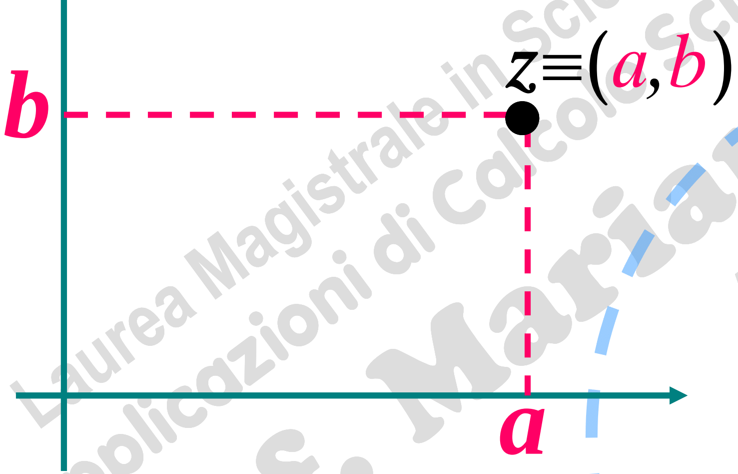
Un numero complesso z è una coppia ordinata di numeri reali (a,b)

$$\mathbb{C} = \{z=(a,b) : a,b \in \mathbb{R}\} \qquad \mathbb{C} \longleftarrow\bullet\longrightarrow \mathbb{R}^2$$

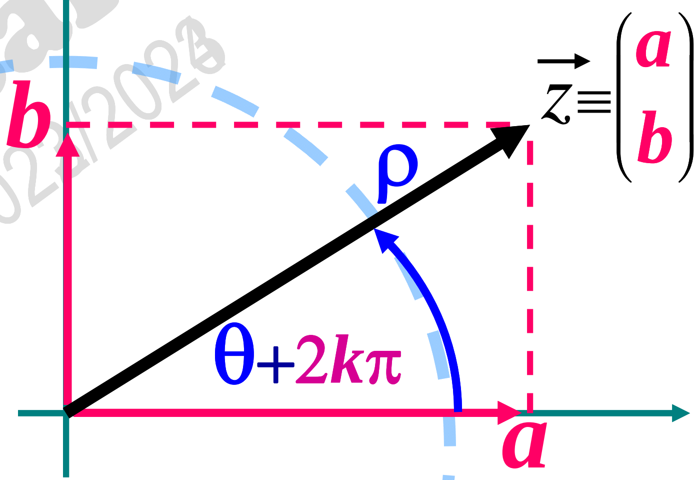
$\mathbb{C}$ denota l'insieme dei numeri complessi (o Campo Complesso)

geometricamente il piano complesso si chiama piano di Argand-Gauss

un numero complesso z come **punto** del piano $\mathbb{R}^2$ (spazio affine euclideo), con coordinate cartesiane a e b.



un numero complesso z come **vettore** del piano $\mathbb{R}^2$ (spazio lineare normato), con componenti a e b lungo gli assi.



coordinate cartesiane $z \equiv (a,b)$
dove
$a = \mathbf{Re}\, z$ (la parte reale di z)
$b = \mathbf{Im}\, z$ (la parte immaginaria di z)

coordinate polari $z \equiv [\rho, \theta]$
dove
$\rho = |z|$ (il modulo di z)
$\theta = \mathbf{arg}\, z$ (l'argomento di z)

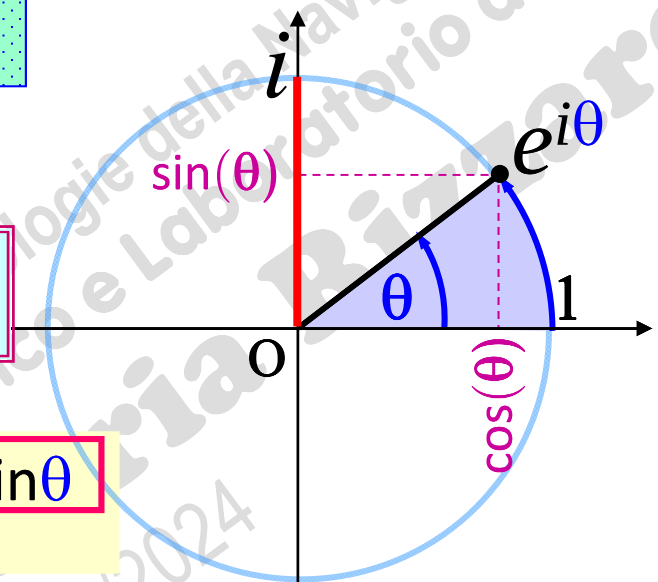
Rappresentazione dei numeri complessi

forma algebrica $z = a + i\,b$

coordinate cartesiane (a,b)

unità immaginaria $i = (0,1) = \sqrt{-1}$

$i^0 = 1$
$i^1 = i$
$i^2 = -1$
$i^3 = -i$
$i^4 = 1$
$\ldots$




```
z=[3+2i;2;i;-3+2i;-3-2i];
a=real(z); b=imag(z);
disp([a  b])
     3     2
     2     0
     0     1
    -3     2
    -3    -2
```

i ← (riga 0 1)

```
syms a b real; z=a+i*b;
disp([real(z) imag(z)])
     a      b
```

Formula di Eulero* $\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$

* scoperta intorno al 1740

$$e^{+i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$
$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

sommando membro a membro

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{+i\theta} + e^{-i\theta}\right)$$

sottraendo membro a membro

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{+i\theta} - e^{-i\theta}\right)$$

forma trigonometrica $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$

forma esponenziale $z = \rho\, e^{i\theta}$

coordinate polari $[\rho,\theta]$

```
syms a b real; z=a+i*b;
disp([abs(z)  angle(z)])
[(a^2 + b^2)^(1/2), atan2(b, a)]
```

```
z=[3+2i;2;i;-3+2i;-3-2i];
r=abs(z); t=angle(z);
disp([r  t  t*180/pi])
     3.6056       0.588       33.69
          2           0           0
          1      1.5708          90
     3.6056      2.5536      146.31
     3.6056     -2.5536     -146.31
```

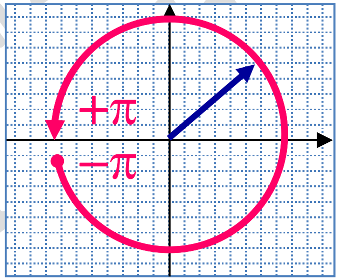
i → (riga 1 1.5708 90)

L’**argomento di un numero complesso** è definito a meno di multipli di 2π. Come gestisce MATLAB gli argomenti dei numeri complessi?

Per un numero complesso z, MATLAB usa **Arg** z, l’Argomento Principale di z, cioè l’angolo viene sempre riportato all’intervallo $]-\pi, +\pi]$.

chiuso

aperto

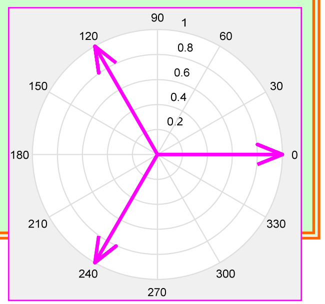


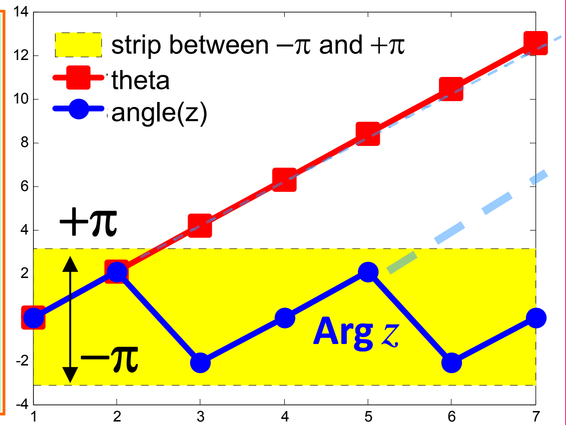

```
rho=2; theta1=pi/6; z1=rho*exp(i*theta1);
theta2=pi/6+2*pi;   z2=rho*exp(i*theta2);
theta3=pi/6-2*pi;   z3=rho*exp(i*theta3);
disp(rad2deg([angle(z1) angle(z2) angle(z3)]))
          30           30           30
```

rad2deg invece di *180/pi

Come andare oltre l’intervallo $]-\pi, +\pi]$?

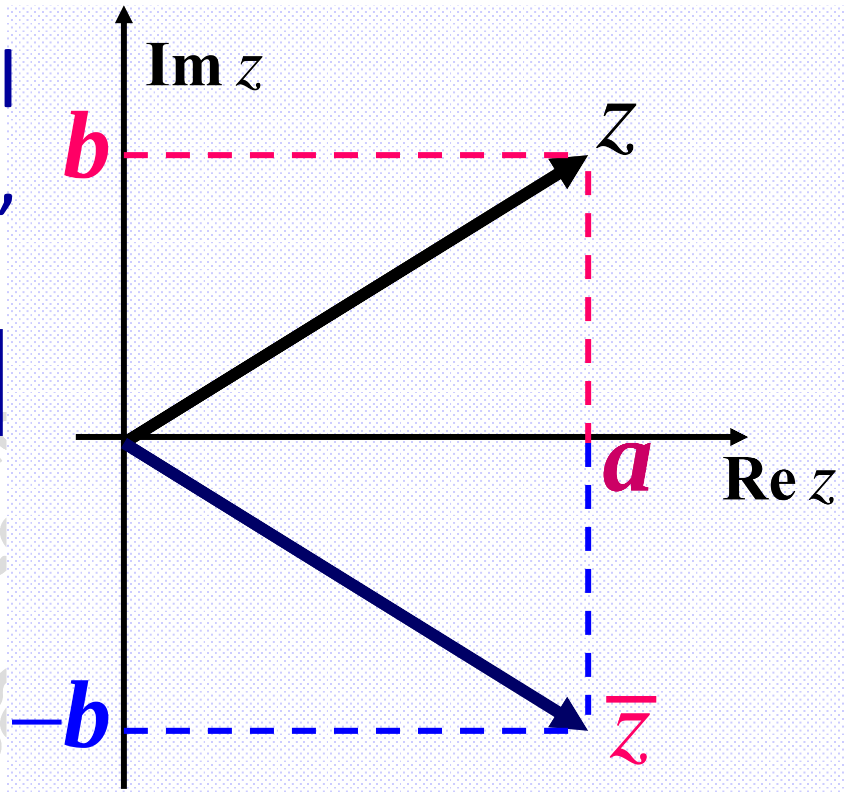
```
theta=(0:2*pi/3:4*pi)'; z=exp(i*theta); compass(z)
disp(rad2deg([theta  angle(z) unwrap(angle(z))]))
1          0             0           0
2        120           120         120
3        240          -120         240
4        360   -1.4033e-14         360
5        480           120         480
6        600          -120         600
7        720   -2.8067e-14         720
```





Se $z=(a,b)=[\rho,\theta]$ allora il **complesso coniugato** di z, denotato come $\overline{z}$, è

$$\overline{z}=(a,-b)=[\rho,-\theta]$$



$\overline{z}$ è il **simmetrico** di z rispetto all'asse reale

$$\rho=\sqrt{z\cdot\overline{z}}$$

MATLAB	`conj(z)`

complesso coniugato in MATLAB

```
z1=3+2i; z2=conj(z1); [z1;z2]
ans =
   3.0000 + 2.0000i
   3.0000 - 2.0000i
```

Operazioni sui numeri complessi

in coordinate cartesiane

$$z_1 = a_1 + ib_1$$
$$z_2 = a_2 + ib_2$$

in coordinate polari

$$z_1 = [\rho_1, \theta_1] = \rho_1 e^{i\theta_1}$$
$$z_2 = [\rho_2, \theta_2] = \rho_2 e^{i\theta_2}$$

confronto $z_1 \stackrel{?}{=} z_2$

in coordinate cartesiane: $(a_1 + ib_1) \stackrel{?}{=} (a_2 + ib_2)$

$$(a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2) = 0 \Longleftrightarrow (a_1 = a_2) \text{ e } (b_1 = b_2)$$

in coordinate polari: $[\rho_1, \theta_1] \stackrel{?}{=} [\rho_2, \theta_2]$

$$\rho_1 e^{i\theta_1} = \rho_2 e^{i\theta_2} \Longleftrightarrow \rho_1 = \rho_2 \text{ e } e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2}$$

cioè $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$

Operazioni sui numeri complessi

addizione

$$z_1 = a_1 + ib_1$$
$$z_2 = a_2 + ib_2$$
$$\Rightarrow z_3 = z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2)$$

(sottrazione)

come sommare due vettori nel piano reale

prodotto

in coordinate cartesiane: $\Rightarrow z_3 = z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) =$
$= a_1 a_2 - b_1 b_2 + i[a_1 b_2 + a_2 b_1]$

in coordinate polari (forma esponenziale):

$$z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$$
$$z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$$
$$\Rightarrow z_3 = z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = \rho_1 \rho_2 \, e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

più semplice

$$\boxed{z_3 = z_1 z_2 = [\rho_1 \rho_2,\ \theta_1 + \theta_2 + 2k\pi]}$$

prodotto dei moduli — somma degli argomenti

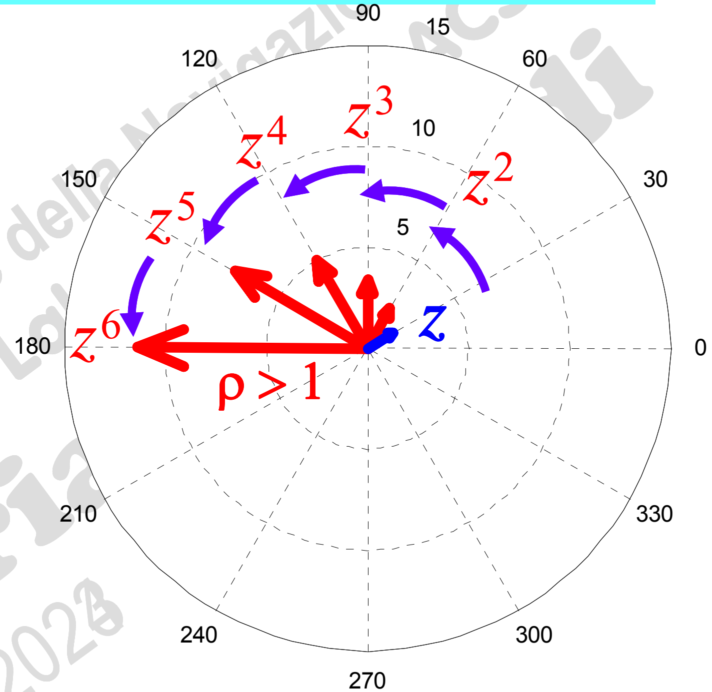
reciproco

in coordinate cartesiane: $\Rightarrow z_3 = 1/z_1 = 1/(a_1 + ib_1) = (a_1 - ib_1)/|a_1 + ib_1|^2$

in coordinate polari: $\Rightarrow z_3 = 1/z_1 = 1/(\rho e^{i\theta}) = (1/\rho)\, e^{-i\theta}$

Potenza intera di un numero complesso

$$z = [\rho,\ \theta+2k\pi]$$
$$z^2 = [\rho^2,\ 2\theta+2k\pi]$$
$$z^3 = [\rho^3,\ 3\theta+2k\pi]$$
$$z^4 = [\rho^4,\ 4\theta+2k\pi]$$
$$\dots$$
$$z^n = [\rho^n,\ n\theta+2k\pi]$$



radice $n^{\underline{\text{sima}}}$ di un numero complesso $z : z^n = w$

```
z=[1.5+i;-3+2i]; w=z.^2;
disp([z     w.^(1/2)])
   1.5 + 1i  =  1.5 + 1i
    -3 + 2i  ≠    3 - 2i
```

OK!

???

```
z=[1+.6i;.6+i];  w=z.^5;
disp([z      w.^(1/5)])
    1 + 0.6i  =        1 +       0.6i
   .6 +   1i  ≠   1.1365 -   0.26162i
```

Teorema Fondamentale dell'Algebra: un polinomio di grado $n\geq 1$ ha esattamente n radici complesse, ciascuna contata con la sua molteplicità.

`w.^(1/n)` restituisce un solo valore non sempre uguale alla radice originaria

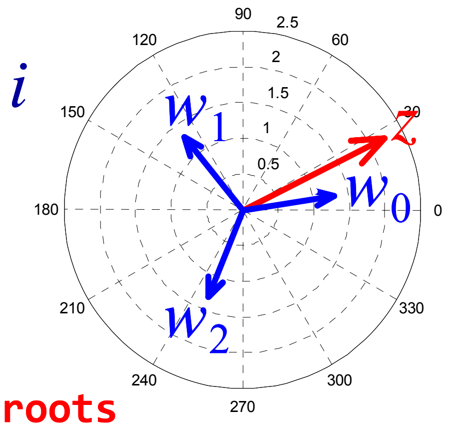
Per calcolare tutte le radici $n^{\underline{\text{sime}}}$ di $z\neq 0$, si ha che l'eq. $w^n=z$ $\Longleftrightarrow$ $w^n=[r^n,n\varphi]=z=[\rho,\theta] \Longleftrightarrow r^n=\rho,\ n\varphi=\theta+2k\pi$ risolvendo rispetto a r,φ otteniamo la seguente formula:

$$w_k=\sqrt[n]{z}=[r,\varphi_k]=\begin{cases} r=\sqrt[n]{\rho} \\ \varphi_k=\dfrac{\theta}{n}+\dfrac{2k\pi}{n}, \qquad k=0,1,\ldots,n-1 \end{cases}$$

dove k deve assumere n **valori interi consecutivi**: per esempio, $k=0,1,2,\ldots,n-1$, oppure $k=-2,-1,0,1,\ldots,n-3$, oppure $k=n,n+1,\ldots,2n-1$, …

Esempio: radici cubiche di $2+i$

$$w_k=\sqrt[3]{2+i}=[r,\varphi_k]=\begin{cases} r=\sqrt[3]{|2+i|} \\ \varphi_k=\dfrac{\arg(2+i)}{3}+\dfrac{2k\pi}{3}, \qquad k=0,1,2 \end{cases}$$




```
z=2+i;   n=3;   k=(0:(n-1))';
[x,y]=pol2cart(angle(z)/n+2*pi/n*k, abs(z)^(1/n));
wk=complex(x,y); disp([wk wk.^n]) % check they give back z
  1.2921 + 0.20129i      2 + 1i
-0.82036 + 1.0183i       2 + 1i
-0.47171 - 1.2196i       2 + 1i
```

w_k^3 uguale a $z=2+i$

MATLAB **roots**

```
rk=roots([1 0 0 -z])
rk =
  -0.82036 +   1.0183i
  -0.47171 -   1.2196i
    1.2921 + 0.20129i
```

le radici sono le stesse, ma non nello stesso ordine

radici $n^{\underline{\text{sime}}}$ dell'unità

$$w_k = \sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{[1,0]} = \left[1, \frac{2k\pi}{n}\right], \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

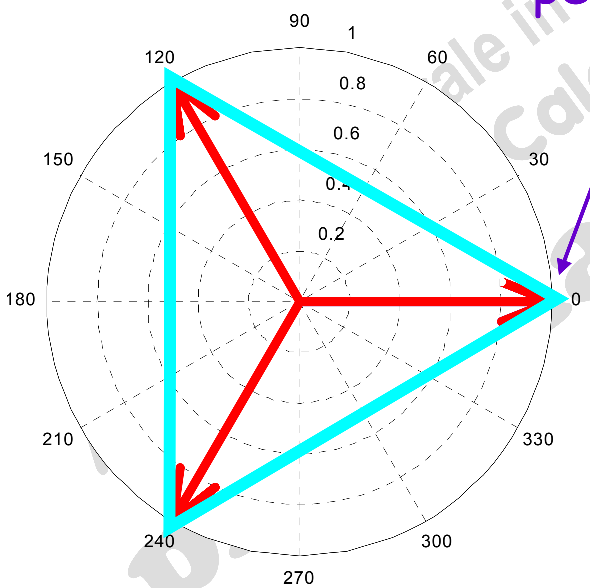
Le radici $n^{\underline{\text{sime}}}$ dell'unità sono localizzate sui vertici del poligono regolare di n lati inscritto nel cerchio unitario. Tra le radici c'è sempre 1; per n dispari le altre radici sono complesse coniugate; per n pari, oltre a 1, c'è anche –1 come radice reale.

Esempi

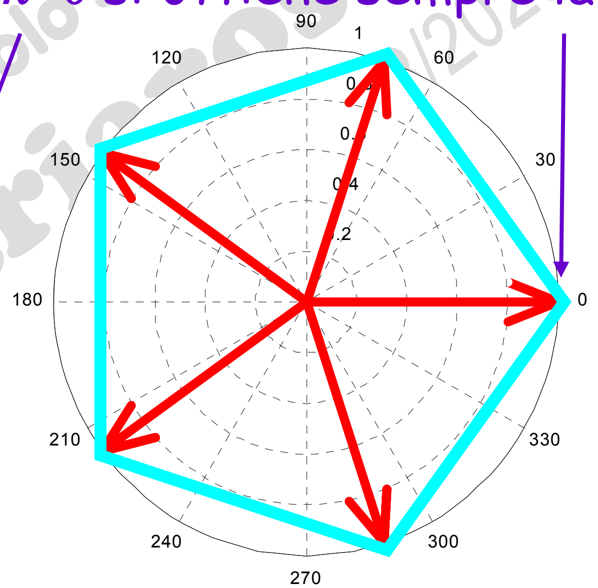
```
z=1;  n=…;  k=(0:(n-1))';  wk=exp(2i*pi*k/n);  compass(wk)
```

$w_k = \sqrt[3]{1}$ $\qquad$ $w_k = \sqrt[5]{1}$ $\qquad$ $w_k = \sqrt[6]{1}$

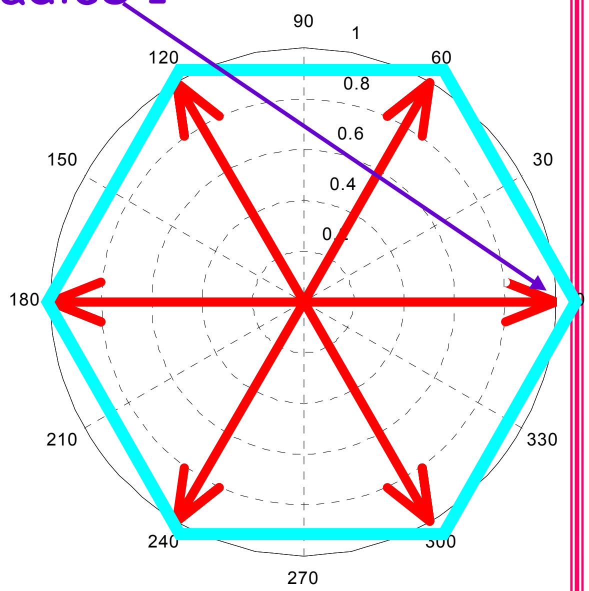
per k=0 si ottiene sempre la radice 1



triangolo equilatero



pentagono



esagono

Perché sono importanti le radici $n^{\underline{\text{sime}}}$ dell'unità

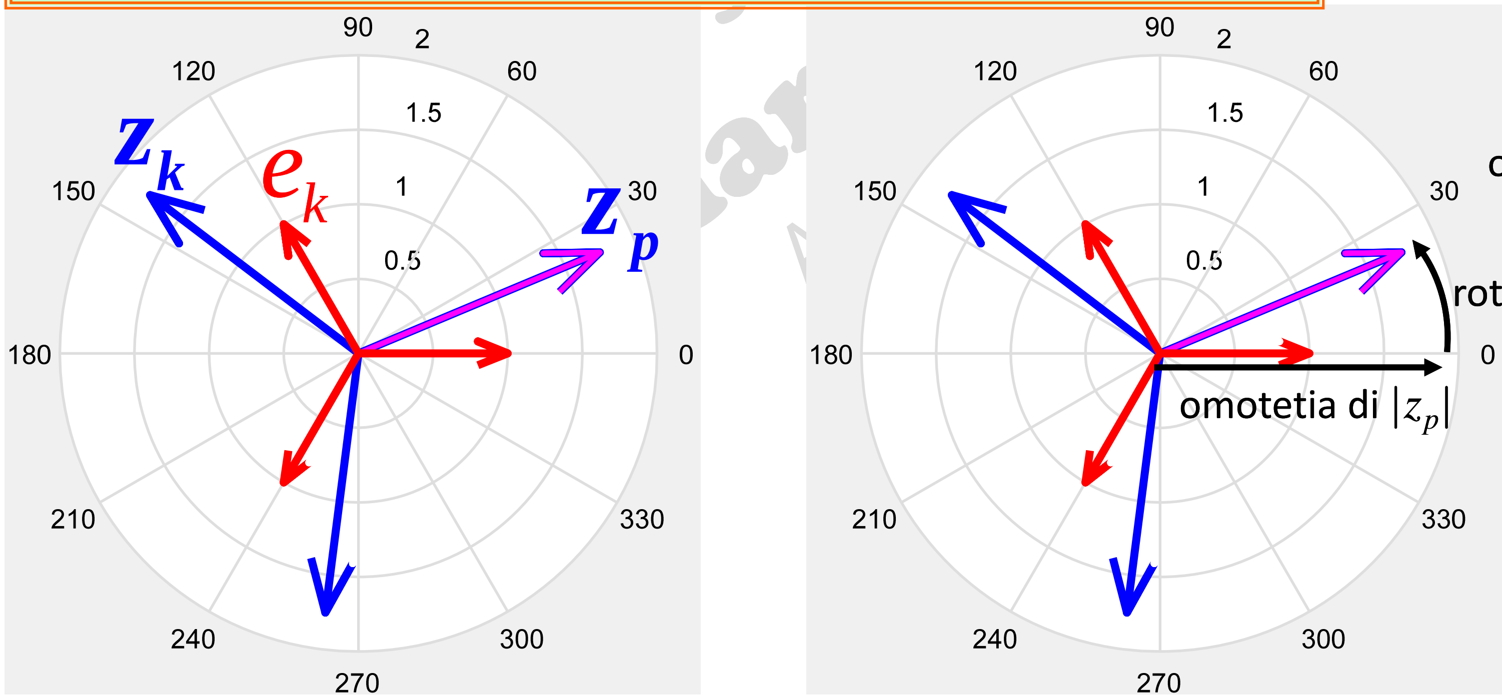
Teor. Le radici $n^{\underline{\text{sime}}}$ di un numero complesso possono essere ottenute moltiplicando una particolare radice del numero complesso per tutte le radici $n^{\underline{\text{sime}}}$ dell'unità.

$$z_k = \sqrt[3]{2+5i} \quad \Longrightarrow \quad z_k = z_p \cdot e_k$$

dove
- z_p è una radice cubica particolare di $2+5i$
- $e_k = \sqrt[3]{1}$ sono le radici cubiche di 1

```
n=3; Z=2+5i; z=roots([1,zeros(1,n-1),-(2+5*i)]); % radici
zp=Z^(1/n); % una radice particolare
e=roots([1,0,0,-1]); % radici cubiche dell'unità
compass(zp*e,'b'); hold on; h=compass(zp,'m'); compass(e,'r')
```

$$z_p\, e^{\,k} = \underset{\text{omotetia}}{|z_p|}\ \underset{\text{rotazione}}{\arg z_p}\, e^{\,k}$$



DEFINIZIONE

Una radice n^{sima} dell'unità **primitiva** ζ è una particolare radice n^{sima} dell'unità, le cui n potenze successive ζ^k, $k=0,1,\dots,n-1$ generano tutte le n radici n^{sime} dell'unità, cioè:

$$\boxed{(\zeta^k)^n = 1 \quad \forall k = 0,\ 1,\ \dots,\ n-1}$$

(ζ^k è radice n^{sima} di 1)

Esempio: quali radici quarte di 1 sono primitive?

```
n=4; k=(0:n-1)'; r=exp(2i*k*sym(pi)/n); disp(r.')
[1, 1i, -1, -1i]
disp([nan r.'; k (r.').^k])
[NaN,        1,          1i,         -1,          -1i]
[  0,        1,          1,           1,            1 ]
[  1,        1,          1i,         -1,          -1i]
[  2,        1,          -1,          1,          -1 ]
[  3,        1,         -1i,         -1,           1i]
```

sempre 1 — solo 1 o -1

$r=1$: no $r=i$: si $r=-1$: no $r=-i$: si

Teor. caratterizzazione delle radici primitive

Tra le radici n^{sime} dell'unità

$$w_k = \sqrt[n]{1} = \left[1, \frac{2k\pi}{n}\right], \qquad k = 0,1,\dots,n-1$$

quelle primitive w_k sono tali che n e k sono primi tra loro, cioè **mcd**$(n,k) = 1$. **mcd**(): massimo comun divisore

in inglese **gcd**(): greatest common divisor

```
disp([k gcd(k,n)])
   0     4
   1     1
   2     2
   3     1
```

$r=1$: no
$r=i$: si
$r=-1$: no
$r=-i$: si

Tra le radici $n^{\underline{\text{sime}}}$ dell'unità

$$w_k = \sqrt[n]{1} = \left[1, \frac{2k\pi}{n}\right], \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

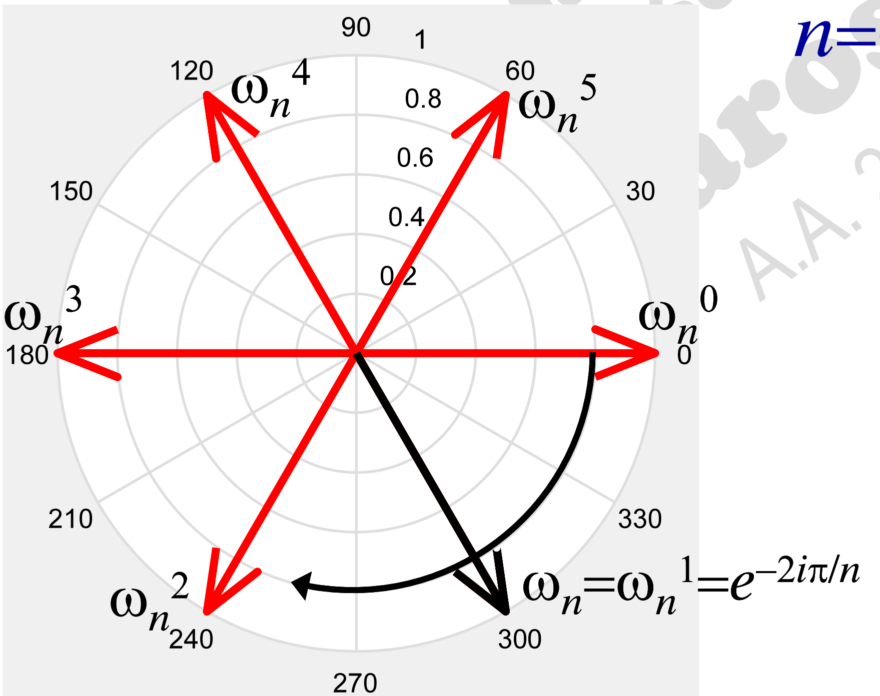
le radici ottenute per $k = 1$ e per $k = n-1$:

$$w_1 = \left[1, \frac{2\pi}{n}\right] = e^{i\frac{2\pi}{n}}, \quad w_{n-1} = \left[1, \frac{2(n-1)\pi}{n}\right] = \left[1, -\frac{2\pi}{n}\right] = e^{-i\frac{2\pi}{n}}$$

sono sempre primitive. Esse sono complesse coniugate.

$\overline{\omega}_n$ in **IDFT**

ω_n in **DFT**



$n=6$