



SIS

Scuola Interdipartimentale
delle Scienze, dell'Ingegneria
e della Salute



Laurea Magistrale in STN

Applicazioni di Calcolo Scientifico e Laboratorio di ACS (12 cfu)

prof. Mariarosaria Rizzardi

Centro Direzionale di Napoli – Isola C4

stanza: n. 423 – Lato Nord, 4° piano

tel.: 081 547 6545

email: mariarosaria.rizzardi@uniparthenope.it

Argomenti trattati

- **Curve e superfici:** equazioni cartesiane e parametriche, curve regolari.
- **Sistemi di coordinate:** cartesiane, polari, cilindriche, sferiche, omogenee.
- **Retta tangente a una curva, piano tangente a una superficie, retta normale.**
- **Curve a tratti:** continuità geometrica e parametrica.

Rappresentazione di curve e superfici

❑ Non parametrica

❖ Esplicita

❖ Implicita

curva nel piano

$$y = f(x), \quad x \in a, b$$

curva nello spazio

$$\begin{cases} y = f(x), \\ z = g(x), \end{cases} \quad x \in a, b$$

superficie nello spazio

$$z = f(x, y), \quad x, y \in a, b \times c, d$$

❑ Parametrica

(dipendente da parametri)

curva nel piano

$$f(x, y) = 0$$

curva nello spazio

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

superficie nello spazio

$$f(x, y, z) = 0$$

superficie nello spazio

curva nel piano

$$\begin{cases} x = x(\tau), \\ y = y(\tau), \end{cases} \quad \tau \in a, b$$

1 parametro

curva nello spazio

$$\begin{cases} x = x(\tau) \\ y = y(\tau), \\ z = z(\tau), \end{cases} \quad \tau \in a, b$$

1 parametro

$$\begin{cases} x = x(\lambda, \mu) \\ y = y(\lambda, \mu), \\ z = z(\lambda, \mu), \end{cases} \quad \lambda, \mu \in a, b \times c, d$$

2 parametri

Esempi: rappresentazione non parametrica

Esplicita: retta in \mathbb{R}^2

$$y = mx + q$$

Esplicita: parabola in \mathbb{R}^2

$$y = ax^2 + bx + c$$

Implicita: circonferenza in \mathbb{R}^2

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

Implicita: retta in \mathbb{R}^3

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

Esempi: rappresentazione parametrica (sempre esplicita)

parametro/i

retta in \mathbb{R}^2
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$
 1 parametro

ellisse in \mathbb{R}^2
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \cos \theta \\ b \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in -\pi, +\pi$$
 1 parametro

valgono in \mathbb{R}^n

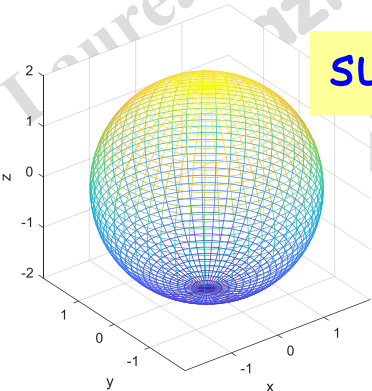
retta in \mathbb{R}^3
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$
 1 parametro

piano in \mathbb{R}^3
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$
 2 parametri

superficie sferica di centro P_0 in \mathbb{R}^3 (r, φ, θ) coordinate sferiche

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + r \sin \varphi \cos \theta \\ y_0 + r \sin \varphi \sin \theta \\ z_0 + r \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \varphi \in 0, \pi, \theta \in -\pi, +\pi$$

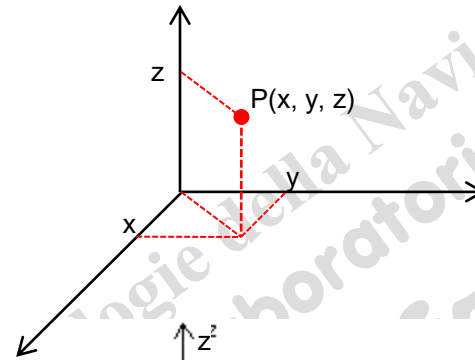
2 parametri



Sistemi di coordinate in \mathbb{R}^3

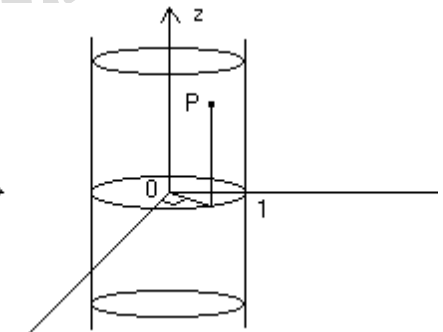
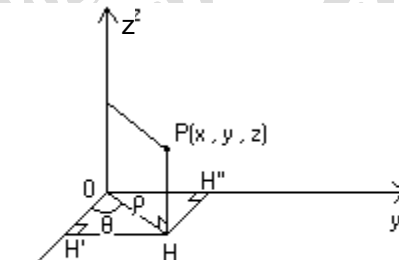
Cartesiane $P(x, y, z)$

x ascissa
y ordinata
z quota (o altezza)



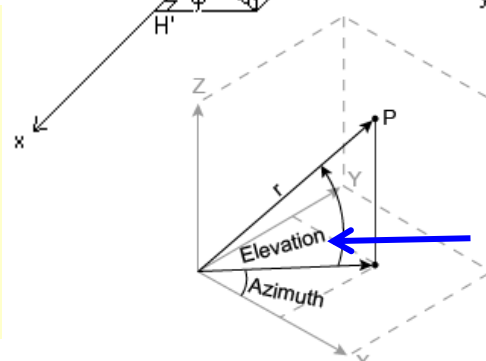
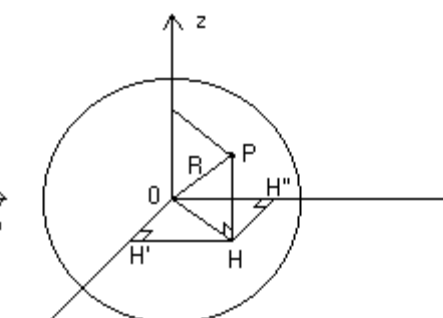
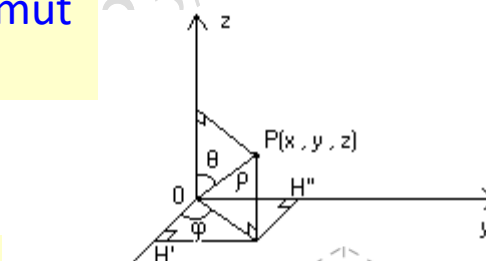
Cilindriche $P(\rho, \theta, z)$ o polari in \mathbb{R}^2

O polo, Ox asse polare
 $\rho \in]0, \infty[$ raggio vettore
 $\theta \in [0, 2\pi[$ anomalia o azimut
z quota



Sferiche $P(\rho, \varphi, \theta)$

O polo, Oz asse polare
 $\rho \in [0, \infty[$ raggio vettore
 $\theta \in [0, \pi]$ colatitudine
($\pi/2$ -latitudine)
 $\varphi \in [0, 2\pi]$ longitudine o
azimut



latitudine = $\pi/2 - \theta$

Laurea Magistrale in Ingegneria
Applicazioni di Ingegneria
Prof. M. Rizzardi

Passaggio da un sistema di coordinate ad un altro in MATLAB

- da cartesiane $P(x,y,z)$ a cilindriche $P(\rho,\theta,z)$

```
[theta,rho,z] = cart2pol(x,y,z);
```

```
rho = sqrt(x.^2+y.^2);  
theta = atan2(y,x);
```

- da cilindriche $P(\rho,\theta,z)$ a cartesiane $P(x,y,z)$

```
[x,y,z] = pol2cart(theta,rho,z);
```

```
x = rho.*cos(theta);  
y = rho.*sin(theta);
```

- da cartesiane $P(x,y,z)$ a sferiche $P(\rho,\varphi,\theta)$

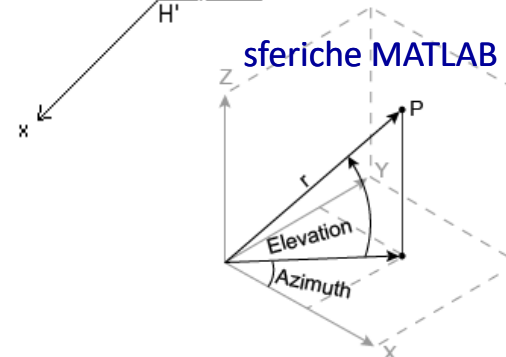
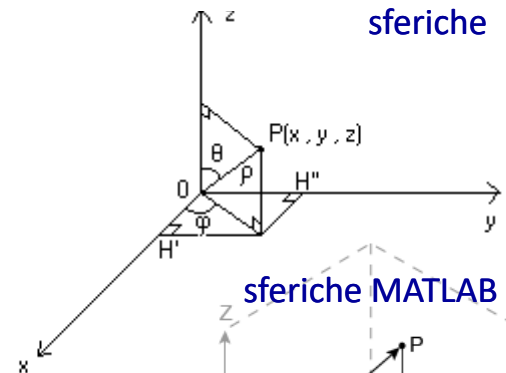
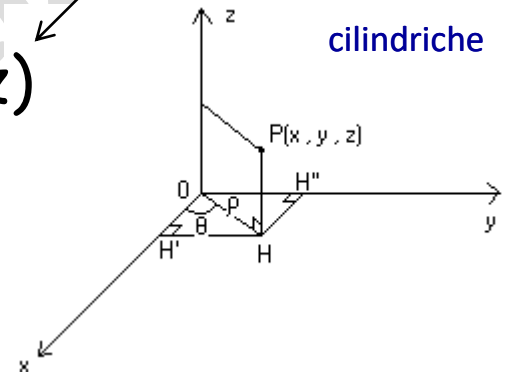
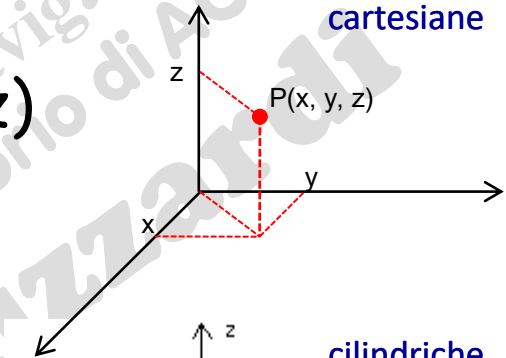
```
[phi,el,rho]=cart2sph(x,y,z); theta = pi/2-el;
```

```
rho = sqrt(x.^2+y.^2+z.^2);  
theta = acos(z,rho); el = pi/2-theta;  
phi = atan2(y,x);
```

- da sferiche $P(\rho,\varphi,\theta)$ a cartesiane $P(x,y,z)$

```
el = pi/2-theta; [x,y,z]=sph2cart(phi,el,rho);
```

```
z = rho.*cos(theta);  
x = rho.*cos(el).*cos(phi);  
y = rho.*cos(el).*sin(phi);
```



Coordinate omogenee (o coordinate proiettive)

Introdotte da August Ferdinand Moebius nel 1827.

Idea: avere una rappresentazione del punto all'infinito dello stesso tipo di quella dei punti al finito.

Esempio: P punto al finito in \mathbb{R}^2

$$P \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

coordinate cartesiane

$$\begin{cases} x_1 = \frac{X_1}{X_3} \\ x_2 = \frac{X_2}{X_3} \end{cases}$$

si aggiunge una dimensione

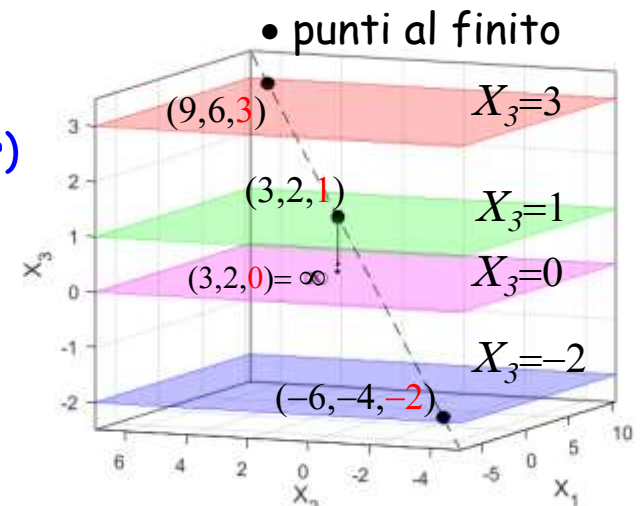
$$P_{\text{om}} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad X_3 \neq 0$$

coordinate omogenee

P_{om} rappresenta una classe di equivalenza che identifica tutti i punti allineati in \mathbb{R}^3 del tipo:

detto **vettore aumentato** (augmented vector)

$$P \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \equiv \dots \equiv k \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k \neq 0$$



L'origine si rappresenta come $(0,0,1)^T$ e **NON** come $(0,0,0)^T$

In 2D il **piano proiettivo reale** può essere pensato come il piano Euclideo cui si aggiungono i punti all'infinito (o **punti impropri**), che sono considerati giacere su una retta detta **retta all'infinito**.

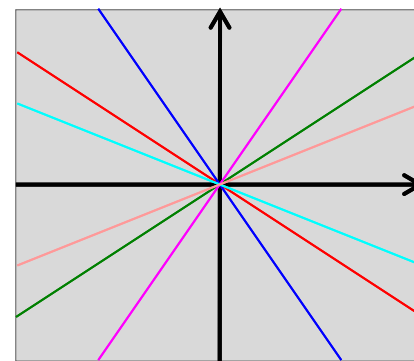
Esiste un punto all'infinito per ogni direzione (inclinazione di una retta), informalmente definito come limite di un punto, sulla retta, che si allontana indefinitamente dall'origine.

Rette parallele nel piano Euclideo sono considerate intersecarsi nel punto all'infinito corrispondente alla loro direzione comune.

Nel **piano Euclideo reale** una **retta passante per l'origine** ha equazione cartesiana: $r : ax + by = 0$, con $|a| + |b| \neq 0$.

ed equazione parametrica: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$
(in coordinate cartesiane)

Posto $w = 1/t$, dall'equazione parametrica, il generico punto sulla retta è descritto da:



$$P(3,2) \in r : -2x + 3y = 0$$



$$(3,2,1) \iff -2x + 3y = 0$$



$$\infty = (3,2,0)$$

coordinate cartesiane

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b}{w} \\ -\frac{a}{w} \end{pmatrix}, \quad w = \frac{1}{t} \in \mathbb{R}$$

coordinate omogenee

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -a \\ w \end{pmatrix}, \quad w = \frac{1}{t} \in \mathbb{R}$$

Per $|t| \rightarrow \infty$ il punto tende all'infinito e $|w| \rightarrow 0$.

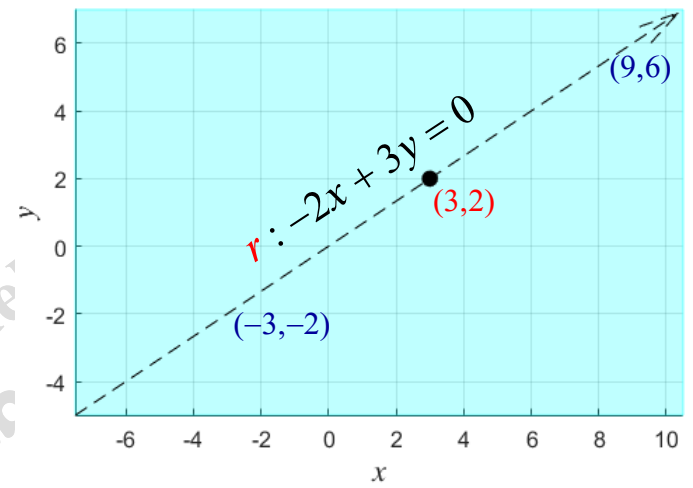
Il punto all'infinito della retta r (direzione) viene descritto in coordinate omogenee come $(b, -a, 0)$.

in generale $\infty \equiv \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\alpha| + |\beta| \neq 0$

Nel piano $\mathbb{R}^2 = (x,y)$ il punto $P(3,2)$ appartiene alla retta r di equazione cartesiana:

$$r : -2x + 3y = 0$$

Ma anche i punti $(9,6)$, $(-3,-2)$, $(-6,-4)$, ... appartengono ad r



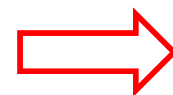
r in equazione parametrica:

$$r : \begin{cases} x = 3/2t \\ y = t \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 1/w \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

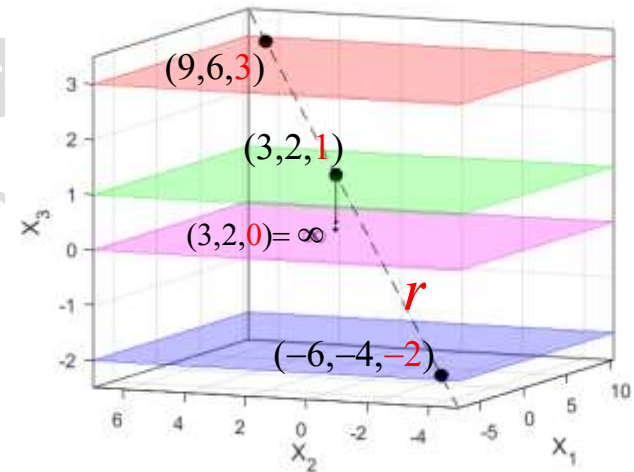
r in coordinate omogenee:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ w \end{pmatrix}$$

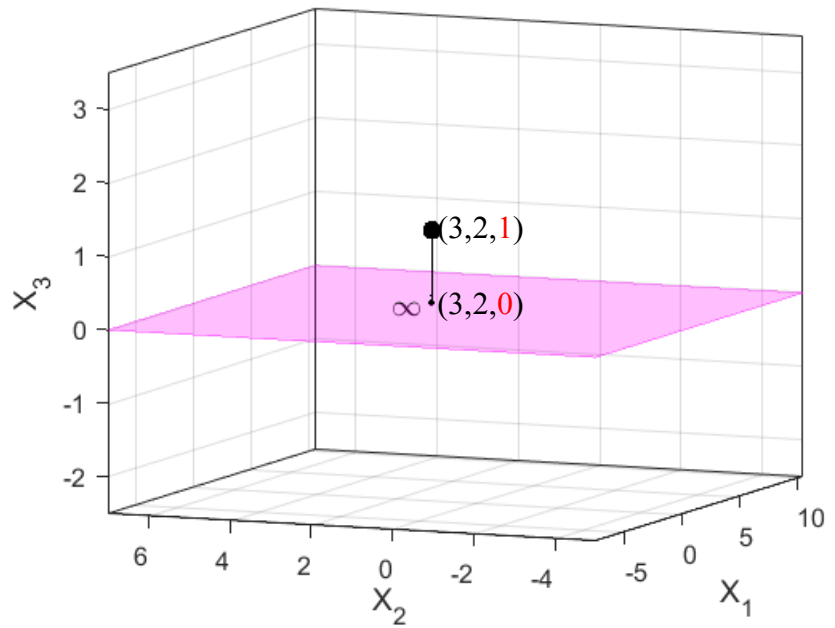
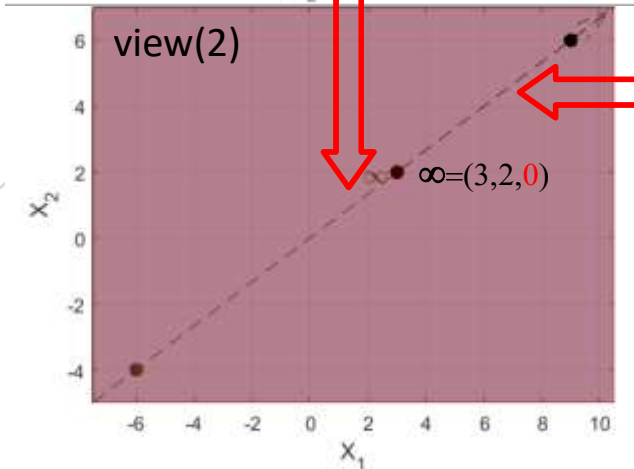
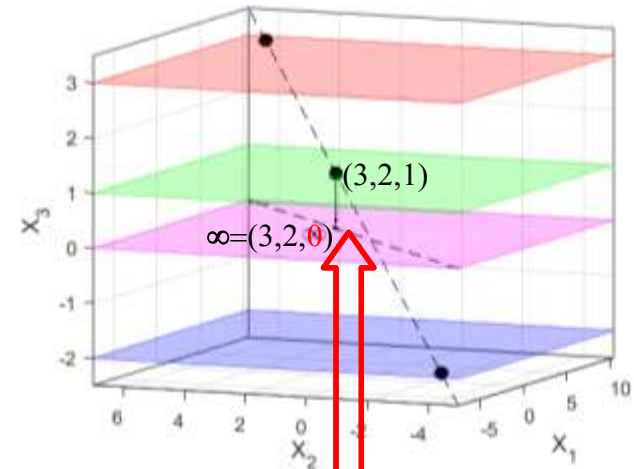
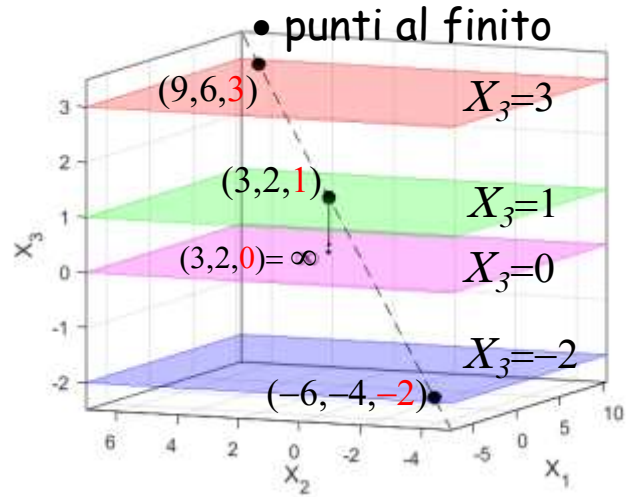
... e il suo punto all'infinito (o punto improprio)?



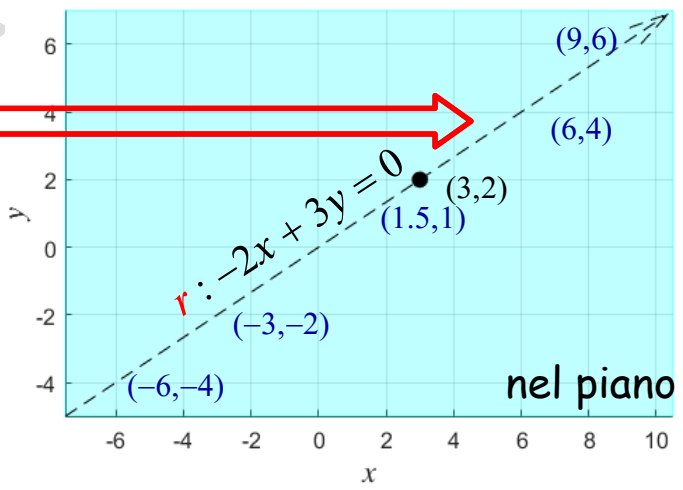
$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$



... e il suo punto all'infinito (o punto improprio)?



$P(3,2) \iff (3,2,1) \iff -2x + 3y = 0 \iff \infty=(3,2,0)$



Equazione parametrica di una retta qualsiasi dello spazio affine* \mathbb{R}^2 in coordinate omogenee

* Anticipazione: Spazio Lineare come insieme di vettori, Spazio Affine come insieme di punti.

1. Dati un punto $P_0(x_0, y_0)$ ed una direzione d (punto all'infinito):

equazione vettoriale $P = P_0 + \lambda d, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

equazioni scalari
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

2. Dati due punti $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$:

equazione vettoriale $P = P_1 + \lambda (P_2 - P_1), \quad \lambda \in \mathbb{R}$

equazioni scalari
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \left[\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

direzione d

Coordinate omogenee in \mathbb{R}^3

$$P \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

coordinate cartesiane

$$\begin{cases} x_1 = \frac{X_1}{X_4} \\ x_2 = \frac{X_2}{X_4} \\ x_3 = \frac{X_3}{X_4} \end{cases}$$

si aggiunge una dimensione

$$P_{\text{om}} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

coordinate omogenee

P_{om} rappresenta una **classe di equivalenza** che identifica tutti i punti allineati in \mathbb{R}^4 del tipo:

$$P \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \equiv \dots$$

detto **vettore aumentato** (augmented vector)

in generale $\infty \equiv \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ 0 \end{pmatrix}$

Equazione parametrica di una retta qualsiasi dello spazio affine \mathbb{R}^3 in coordinate omogenee

1. Dati un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ed una direzione d :

equazione vettoriale

$$P = P_0 + \lambda d, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

equazioni scalari

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

2. Dati due punti $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$:

equazione vettoriale

$$P = P_1 + \lambda (P_2 - P_1), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

equazioni scalari

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \left[\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

direzione



Vantaggi delle coordinate omogenee

- Il punto all'infinito ha una rappresentazione come tutti gli altri punti al finito.
- Tutte le trasformazioni affini (compresa la traslazione) possono essere descritte mediante una matrice.
- La composizione di trasformazioni affini si riduce al prodotto delle loro matrici.

Vantaggi delle coordinate omogenee: esempi

Il punto all'infinito ha una rappresentazione come tutti gli altri punti al finito.

rette parallele

Intersezione di 2 rette nel piano:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 2 = 0 \\ 2x + 3y + 7 = 0 \end{cases} \quad \text{nessuna soluzione}$$

In coordinate omogenee:

$$\begin{cases} W = 0 \\ 2X + 3Y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2 \frac{X}{W} + 3 \frac{Y}{W} - 2 = 0 \\ 2 \frac{X}{W} + 3 \frac{Y}{W} + 7 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2X + 3Y - 2W = 0 \\ 2X + 3Y + 7W = 0 \end{cases}$$

soluzione: punto all'infinito $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Vantaggi delle coordinate omogenee: esempi

□ Tutte le trasformazioni affini (compresa la traslazione) possono essere descritte mediante una matrice.

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Rotazione R di un angolo θ in \mathbb{R}^2
in coordinate omogenee:

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

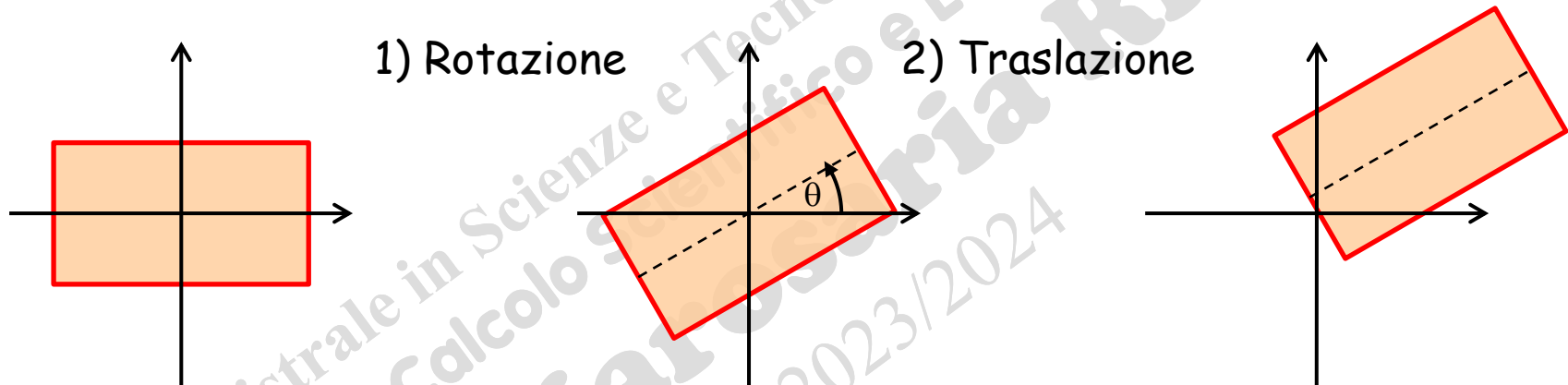
$$T: x \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow y = \begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Traslazione T di passo $(x_0, y_0)^T$ in \mathbb{R}^2
in coordinate omogenee:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vantaggi delle coordinate omogenee: esempi

□ La composizione di trasformazioni affini si riduce al prodotto delle loro matrici.



Roto-traslazione in \mathbb{R}^2
in coordinate omogenee:

$$T \cdot R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & x_0 \\ \sin \theta & \cos \theta & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Curve regolari

Una **curva** Γ in \mathbb{R}^2 o in \mathbb{R}^3 (\mathbb{R}^n), descritta dalle sue equazioni parametriche $\Gamma : \underline{x} = \underline{x}(\tau)$ τ parametro reale $\tau \in [a, b]$

- è **semplice** (non si intreccia) se la funzione vettoriale $\underline{x}(\tau)$ è **iniettiva**;
- è **chiusa** se $\underline{x}(a) = \underline{x}(b)$;

Una **curva** Γ in \mathbb{R}^2 o in \mathbb{R}^3 (\mathbb{R}^n), descritta dalle sue equazioni parametriche $\Gamma : \underline{x} = \underline{x}(\tau)$ τ parametro reale $\tau \in [a, b]$

è **semplice e regolare** se

- la funzione vettoriale $\underline{x}(\tau)$ è **iniettiva**;
- la curva ammette **retta tangente continua** in ogni suo punto, cioè le funzioni che descrivono le sue equazioni parametriche hanno:
 - ❖ **derivata continua**: $\exists \underline{x}' = \underline{x}'(\tau)$ continua in $]a, b[$ ($\underline{x}(\tau) \in C^1]a, b[$)
 - ❖ **e non nulla**: $\underline{x}'(\tau) \neq \underline{0} \quad \forall \tau \in]a, b[$

Superfici regolari

Una **superficie** S in \mathbb{R}^3 , descritta dalle sue **equazioni parametriche** $S : \underline{x} = \underline{x}(\tau, \omega)$ τ, ω parametri reali, $(\tau, \omega) \in [a, b] \times [c, d]$ è **regolare** se ammette piano tangente continuo in ogni suo punto, cioè se:

- ❑ la funzione vettoriale $\underline{x}(\tau, \omega)$ è iniettiva;
- ❑ la funzione vettoriale $\underline{x}(\tau, \omega)$ ha derivate parziali continue;
- ❑ la **matrice Jacobiana** di $\underline{x}(\tau, \omega)$ ha rango 2 (cioè nessuna delle due colonne può annullarsi).

$$S \begin{cases} x_1 = x_1(\tau, \omega) \\ x_2 = x_2(\tau, \omega) \\ x_3 = x_3(\tau, \omega) \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \text{matrice Jacobiana: } J_{\tau, \omega} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \tau} & \frac{\partial x_1}{\partial \omega} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \tau} & \frac{\partial x_2}{\partial \omega} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \tau} & \frac{\partial x_3}{\partial \omega} \end{pmatrix}$$

Retta e piano tangente

Γ è una curva regolare in \mathbb{R}^2

$\Gamma: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \tau \\ y \tau \end{pmatrix}, \quad \tau \in a, b$

retta tangente in P_0

$$\begin{pmatrix} x \lambda \\ y \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \tau_0 \\ y \tau_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x' \tau_0 \\ y' \tau_0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

equazioni parametriche scalari \rightarrow $\begin{pmatrix} x \tau_0 \\ y \tau_0 \end{pmatrix}$ (coordinate di $P_0 \in \Gamma$)
 equazione parametrica vettoriale \rightarrow $\begin{pmatrix} x' \tau_0 \\ y' \tau_0 \end{pmatrix}$ (v direzione tangente in P_0)

$P = P_0 + \lambda v$

S è una superficie regolare in \mathbb{R}^3

$S: \begin{cases} x = x \tau, \omega \\ y = y \tau, \omega \\ z = z \tau, \omega \end{cases}, \quad \tau, \omega \in a, b \times c, d$

piano tangente in P_0

$$\begin{pmatrix} x \lambda, \mu \\ y \lambda, \mu \\ z \lambda, \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \tau_0, \omega_0 \\ y \tau_0, \omega_0 \\ z \tau_0, \omega_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \tau} \tau_0, \omega_0 \\ \frac{\partial y}{\partial \tau} \tau_0, \omega_0 \\ \frac{\partial z}{\partial \tau} \tau_0, \omega_0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \omega} \tau_0, \omega_0 \\ \frac{\partial y}{\partial \omega} \tau_0, \omega_0 \\ \frac{\partial z}{\partial \omega} \tau_0, \omega_0 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

J matrice jacobiana in $P_0 \rightarrow J \tau_0, \omega_0 \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$

equazioni parametriche scalari \rightarrow $\begin{pmatrix} x \tau_0, \omega_0 \\ y \tau_0, \omega_0 \\ z \tau_0, \omega_0 \end{pmatrix}$ (coordinate di $P_0 \in \Gamma$)
 equazione parametrica vettoriale \rightarrow $\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \tau} \tau_0, \omega_0 \\ \frac{\partial y}{\partial \tau} \tau_0, \omega_0 \\ \frac{\partial z}{\partial \tau} \tau_0, \omega_0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \omega} \tau_0, \omega_0 \\ \frac{\partial y}{\partial \omega} \tau_0, \omega_0 \\ \frac{\partial z}{\partial \omega} \tau_0, \omega_0 \end{pmatrix}$

$P = P_0 + \lambda v + \mu w$

Retta normale a una curva ed a una superficie

Γ è una curva regolare in \mathbb{R}^2

normale alla curva in P_0 : vettore d ortogonale al vettore tangente in P_0

$$P = P_0 + \lambda d, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' & \tau_0 \\ y' & \tau_0 \end{pmatrix}^T d = 0 \iff d \in \text{Spazio Nullo Sinistro di } \begin{pmatrix} x' & \tau_0 \\ y' & \tau_0 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{N} A^T = \{ u \in \mathbb{R}^m : A^T u = \vec{0} \}$ è lo Spazio Nullo Sinistro della matrice $A(m \times n)$

S è una superficie regolare in \mathbb{R}^3

normale al piano in P_0 : vettore d ortogonale al piano tangente in P_0
 d ortogonale alle colonne di $J(\tau_0, \omega_0)$

$$P = P_0 + \lambda d, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \quad J(\tau_0, \omega_0)^T d = 0 \iff d \in \text{Spazio Nullo Sinistro di } J(\tau_0, \omega_0)$$

... oppure d tramite il **prodotto vettoriale** delle due colonne di $J(\tau_0, \omega_0)$

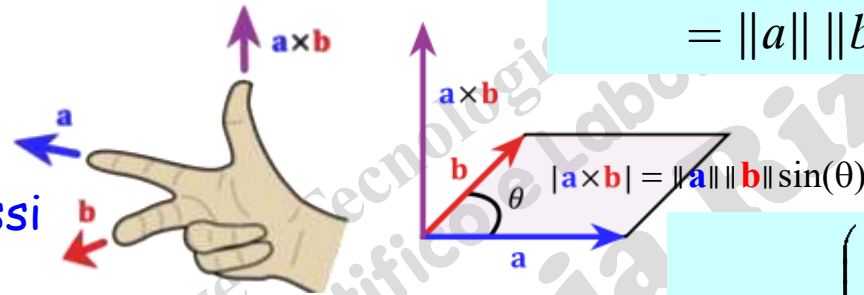
Richiami: prodotto scalare e prodotto vettoriale di due vettori in \mathbb{R}^3

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

prodotto scalare

$$\langle a, b \rangle = a \cdot b = a^T b = \sum_{k=1}^3 a_k b_k \in \mathbb{R}$$

$$= \|a\| \|b\| \cos(\theta)$$



prodotto vettoriale

$$a \times b = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ -a_1 b_3 - a_3 b_1 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ versori degli assi

$$a = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$$

$$b = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}$$

... per "ricordare" il prodotto vettoriale:

usare la **formula del determinante di Laplace**

$$a \times b =$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

minori complementari

Sviluppo del **determinante mediante Teor. di Laplace** applicato alla 1^a riga

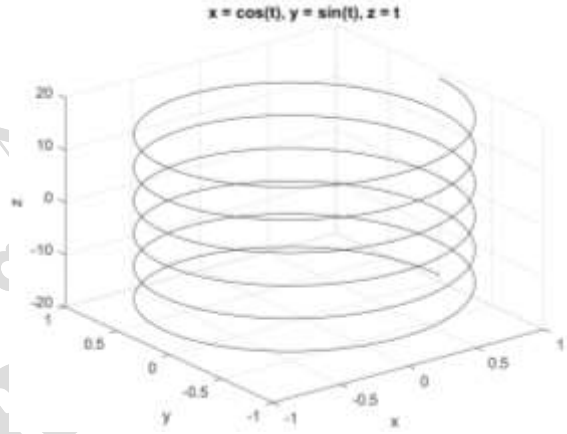
$$a \times b = -1^{1+1} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} + -1^{1+2} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + -1^{1+3} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k} =$$

$$= a_2 b_3 - a_3 b_2 \vec{i} - a_1 b_3 - a_3 b_1 \vec{j} + a_1 b_2 - a_2 b_1 \vec{k}$$

Esempi di curve

curva regolare: **elicoide**
(elica circolare)

$$C(\tau) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \tau \\ \sin \tau \\ \tau \end{pmatrix}, \quad \tau \in \mathbb{R}$$



retta tangente in P_0

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \tau_0 \\ \sin \tau_0 \\ \tau_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -\sin \tau_0 \\ +\cos \tau_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

derivata sempre diversa dal vettore nullo
(C regolare ovunque)

MATLAB simbolico

$$Eq=@(t)[\cos(t);\sin(t);t];$$

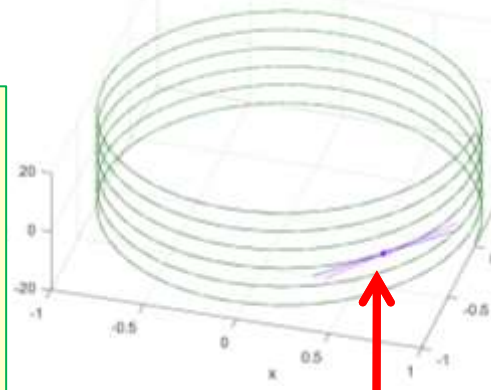
MATLAB numerico

```
syms t real; C = Eq(t);
ezplot3(C(1),C(2),C(3),[-6*pi,+6*pi])
hold on
```

```
ezplot3(C(1),C(2),C(3),[-6*pi,+6*pi], 'animate')
```

```
t = linspace(-6*pi,6*pi,201);
C = Eq(t);
plot3(C(1,:),C(2,:),C(3,:))
hold on; grid on
```

```
t0 = -pi/4; P0 = subs(C,t,t0);
D=diff(C); % derivata simbolica
D0 = subs(D,t,t0);
syms lambda real
P = P0 + lambda*D0;
h=ezplot3(P0(1),P0(2),P0(3));
set(h,'Marker','.', 'Color','k')
ezplot3(P(1),P(2),P(3),[-1 1])
```



```
t0 = -pi/4; [~,k] = min(abs(t-t0));
[t0 t(k)]
P0 = C(:,k);
D=diff(C,1,2)/diff(t(1:2)); % rapp. incr.
D0 = D(:,k);
plot3(P0(1)+[-1 1]*D0(1), ...
      P0(2)+[-1 1]*D0(2), ...
      P0(3)+[-1 1]*D0(3)); axis tight
plot3(P0(1),P0(2),P0(3),'k.')
```

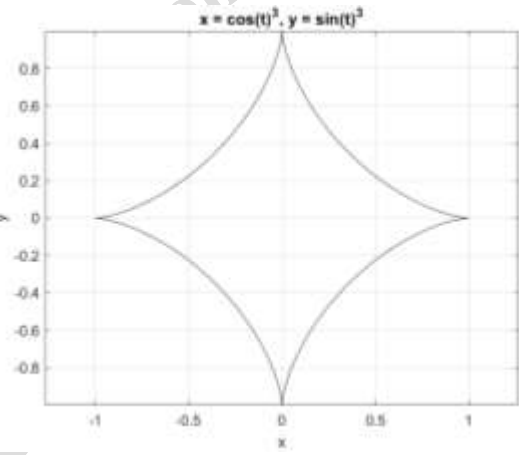
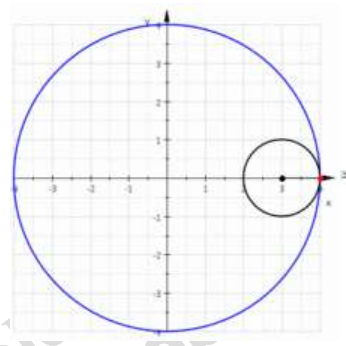
2 tangenti diverse

Esempi di curve

curva non regolare: **astroide**

$$C(\tau) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^3 \tau \\ \sin^3 \tau \end{pmatrix}, \quad \tau \in -\pi, +\pi$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3[\cos^2 \tau] \sin \tau \\ +3[\sin^2 \tau] \cos \tau \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} -[1 - \sin^2 \tau] \sin \tau \\ +[1 - \cos^2 \tau] \cos \tau \end{pmatrix}$$



derivata uguale al vettore nullo per $\tau^* = k \frac{\pi}{2}$ (non regolare)

tangente in P_0

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^3 t_0 \\ \sin^3 t_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3[\cos^2 t_0] \sin t_0 \\ +3[\sin^2 t_0] \cos t_0 \end{pmatrix}, \quad t_0 = k \frac{\pi}{2}$$

MATLAB simbolico

```
syms t real
C = Eq(t);
ezplot(C(1),C(2),[-pi,+pi]); hold on
```

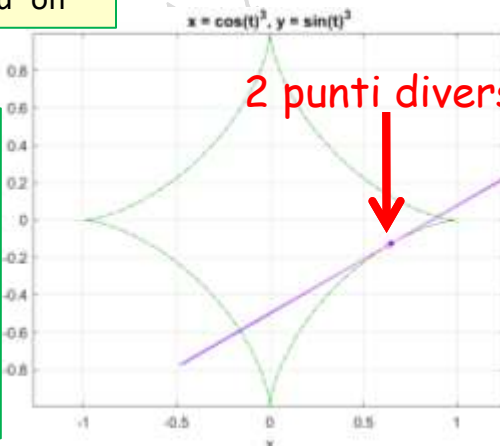
$$Eq=@(t)[\cos(t).^3;\sin(t).^3];$$

anonymous function

MATLAB numerico

```
t = linspace(-pi,+pi,101);
C = Eq(t);
plot(C(1,:),C(2,:)); grid on
axis equal; hold on
```

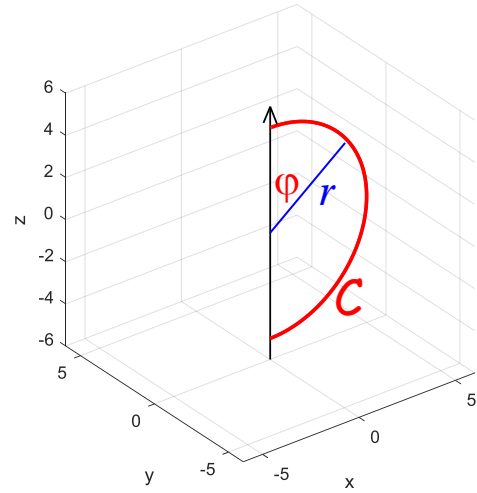
```
t0 = -pi/4; P0 = subs(C,t,t0);
D = diff(C); % derivata simbolica
D0 = subs(D,t,t0);
syms lambda real
P = P0 + lambda*D0;
ezplot(P(1),P(2),[-1 1])
h=ezplot(P(1),P(2),[0 0]);
set(h,'Marker','.', 'Color','k')
```



2 punti diversi

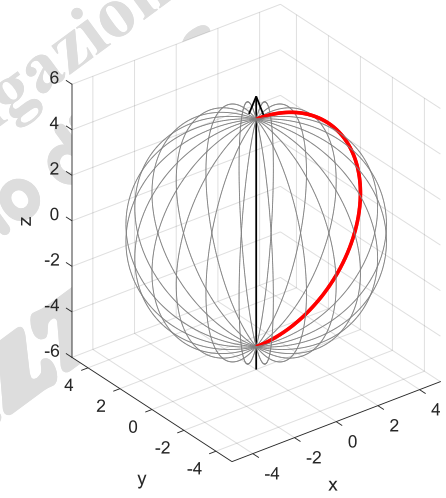
```
t0=-pi/4; [~,k] = min(abs(t-t0));
[t0 t(k)]
P0 = C(:,k);
D = diff(C,1,2)/diff(t(1:2)); % rapp. incr.
D0 = D(:,k);
plot(P0(1)+[-1 1]*D0(1), ...
      P0(2)+[-1 1]*D0(2))
plot(P0(1),P0(2),'k.')
```

Superficie sferica



$$C \varphi = \begin{pmatrix} x \varphi \\ y \varphi \\ z \varphi \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ 0 \\ \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \varphi \in 0, \pi$$

$$R_z \theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



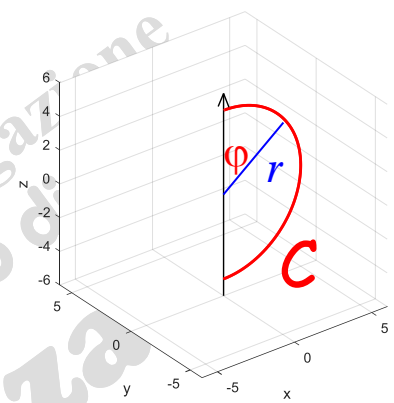
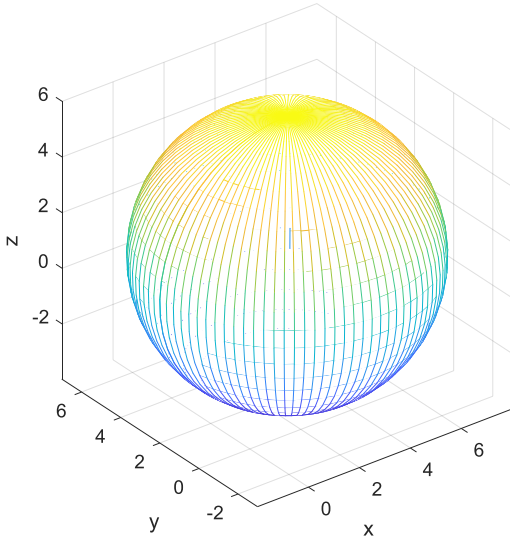
Se si ruota intorno all'asse z una semicirconferenza C assegnata nel piano $\langle x, z \rangle$, di centro $(0,0,0)$ e raggio r , si ottiene una **superficie sferica** di equazioni parametriche:

$$S = R_z \theta \cdot C \varphi \Rightarrow S_{\varphi, \theta} = \begin{pmatrix} x_{\varphi, \theta} \\ y_{\varphi, \theta} \\ z_{\varphi, \theta} \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \varphi \in 0, \pi, \theta \in -\pi, +\pi \\ \text{azimuth} \\ \text{colatitudine} \end{array}$$

Mediante una traslazione si porta il centro in (x_0, y_0, z_0) :

$$S = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \varphi \in 0, \pi, \theta \in -\pi, +\pi$$

Superficie sferica



centro (3,2,1) e raggio 5

$$S = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 5 \sin \varphi \cos \theta \\ 2 + 5 \sin \varphi \sin \theta \\ 1 + 5 \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \varphi \in [0, \pi], \theta \in [-\pi, \pi]$$

Superficie sferica: è regolare?

matrice Jacobiana: $J_{\varphi, \theta} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta & -\sin \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi \sin \theta & +\sin \varphi \cos \theta \\ -\sin \varphi & 0 \end{pmatrix}$

MATLAB simbolico

`J=jacobian(S);`
`rank(J)`

rango $J()=1$ se $\sin \varphi=0$, cioè regolare tranne che ai poli dove comunque ammette piano tangente orizzontale.

Piano tangente alla superficie sferica

piano tangente a S per $\varphi_0 = \pi/4$ e $\theta_0 = -\pi/2$ in $P_0 \left(3, 2 - 5\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + 5\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$

$$P = P_0 + \lambda J_{:,1}(\varphi_0, \theta_0) + \mu J_{:,2}(\varphi_0, \theta_0)$$

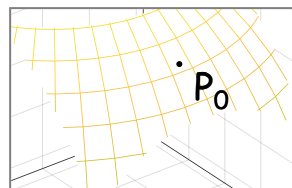
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 - 5\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 + 5\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -5\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -5\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

MATLAB simbolico

```
c=[3;2;1]; r=5; syms ph th real
S=c+r*[cos(th)*sin(ph);sin(th)*sin(ph);cos(ph)];
ezmesh(S(1),S(2),S(3),[0 pi -pi,+pi]); axis equal
```

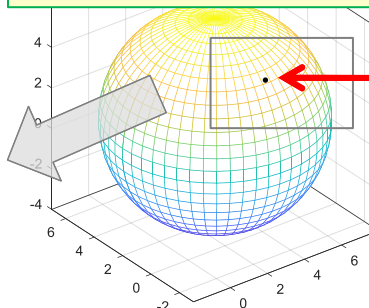
```
th0=-pi/2; ph0=pi/4;
P0 = subs(S,{ph,th},{ph0,th0});
J = jacobian(S); % Jacobiano
J0 = subs(J,{ph,th},{ph0,th0});
syms lambda mu real
P = P0 + J0*[lambda;mu];
hold on
ezsurf(P(1),P(2),P(3),[-1 1])
h=ezplot3(P0(1),P0(2),P0(3));
set(h,'Marker','.', 'Color','k')
```

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 5 \sin \varphi \cos \theta \\ 2 + 5 \sin \varphi \sin \theta \\ 1 + 5 \cos \varphi \end{pmatrix}$$



MATLAB numerico

```
c=[3;2;1]; r=5; th0=-pi/2; ph0=pi/4;
TH=linspace(-pi,+pi,55)'; PH=linspace(0,pi,28)';
[th,ph]=meshgrid(TH, PH); % griglia
S = cat(3,c(1)+r*cos(th).*sin(ph), ...
          c(2)+r*sin(th).*sin(ph), ...
          c(3)+r*cos(ph));
mesh(S(:,:,1), S(:,:,2), S(:,:,3))
grid on; axis equal; hold on
[x0,y0,z0]=sph2cart(th0,pi/2-ph0,r);
P0=c+[x0;y0;z0]; plot3(P0(1),P0(2),P0(3),'k')
```



il punto P_0 non cade su un punto di griglia

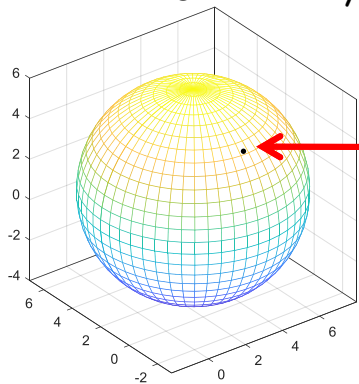
numericamente si possono approssimare le derivate solo nei punti di griglia.

Piano tangente alla superficie sferica

piano tangente a S nel punto di griglia $S_0(\varphi_h, \theta_k)$ invece che in $P_0(\varphi_0, \theta_0)$

$$P = S_0 + \lambda J_{:,1}(\varphi_h, \theta_k) + \mu J_{:,2}(\varphi_h, \theta_k)$$

MATLAB numerico



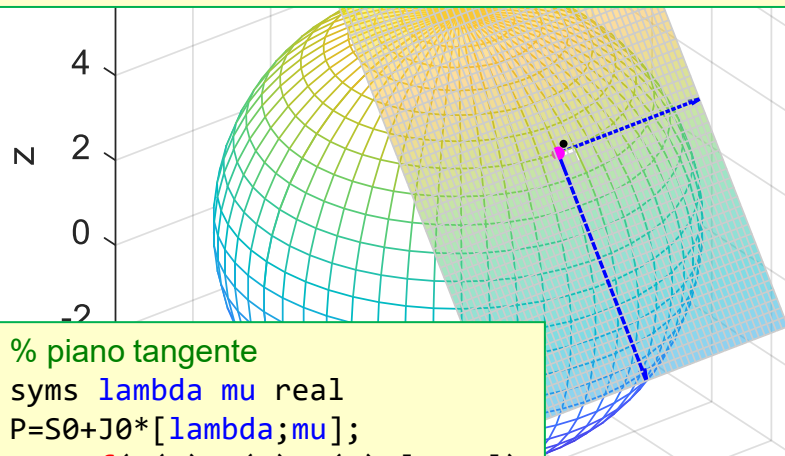
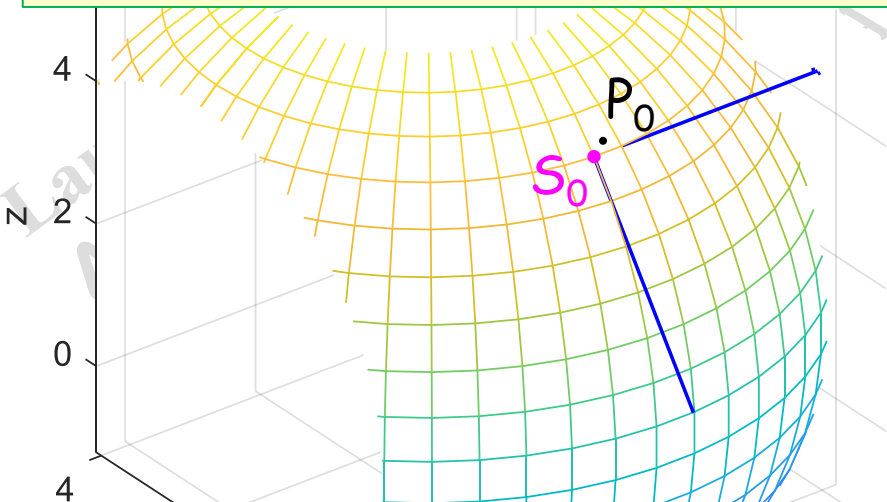
il punto P_0 non cade su un punto di griglia

numericamente si possono approssimare le derivate solo nei punti di griglia, come S_0 .

```
[~,h]=min(abs(PH-ph0));
[~,k]=min(abs(TH-th0));
disp([th0 TH(k) ph0 PH(h)])
-1.5708 ≠ -1.629    0.7854 ≠ 0.81449
S0 = [S(h,k,1); S(h,k,2); S(h,k,3)];
disp([P0 S0])
          3          2.7885
-1.5355 ≠ -1.6307
          4.5355          4.4312
plot3(S0(1),S0(2),S0(3),'m')
```

% rapporti incrementali parziali

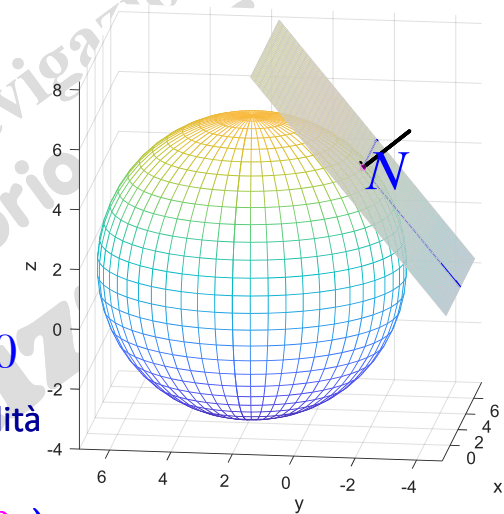
```
dS0dPH = diff([S([h h+1],k,1) S([h h+1],k,2) S([h h+1],k,3)])'./diff(PH([h h+1]));
dS0dTH = diff([S(h,[k k+1],1); S(h,[k k+1],2); S(h,[k k+1],3)],1,2)./diff(TH([k k+1]));
J0 = [dS0dPH dS0dTH]; % Jacobiano numerico in S0
h=quiver3([S0(1) S0(1)], [S0(2) S0(2)], [S0(3) S0(3)], J0(1,:), J0(2,:), J0(3,:), 0); set(h, 'Color', 'b')
```



```
% piano tangente
syms lambda mu real
P=S0+J0*[lambda;mu];
ezsurf(P(1),P(2),P(3),[-1 1])
```

Normale alla superficie sferica

Si calcola una base per la normale N come vettore ortogonale al piano tangente in S_0



$$N: P = S_0 + \lambda d, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \iff J(\varphi_h, \theta_k)^T d = 0$$

condizione di ortogonalità

$$\iff d \in \mathcal{N}(J^T) = \text{Spazio Nullo Sinistro di } J(\varphi_h, \theta_k)$$

$\mathcal{N}(A)$: Spazio Nullo di una matrice A
 $\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n: Ax = \underline{0}\} \quad \mathcal{N}(A) \subseteq \mathbb{R}^n$

$\mathcal{N}(A^T)$: Spazio Nullo Sinistro di una matrice A
 $\mathcal{N}(A^T) = \{y \in \mathbb{R}^m: A^T y = \underline{0}\} \quad \mathcal{N}(A^T) \subseteq \mathbb{R}^m$

MATLAB numerico

```
% rapporti incrementali parziali
dS0dPH=diff([S([h h+1],k,1) S([h h+1],k,2) S([h h+1],k,3)])./diff(PH([h h+1]));
dS0dTH=diff([S(h,[k k+1],1);S(h,[k k+1],2);S(h,[k k+1],3)],1,2)./diff(TH([k k+1]));
J0 = [dS0dPH dS0dTH]; % Jacobiano numerico in S0
d = null(J0.');
```

... oppure mediante il prodotto vettoriale delle colonne di $J(\varphi_0, \theta_0)$

```
% rapporti incrementali parziali
dS0dPH=diff([S([h h+1],k,1) S([h h+1],k,2) S([h h+1],k,3)])./diff(PH([h h+1]));
dS0dTH=diff([S(h,[k k+1],1);S(h,[k k+1],2);S(h,[k k+1],3)],1,2)./diff(TH([k k+1]));
J0 = [dS0dPH dS0dTH]; % Jacobiano numerico in S0
d = cross(J0(:,1),J0(:,2));
```

Normale alla superficie sferica

centro (3,2,1) e raggio 5

$$S = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 5 \cos \theta \sin \varphi \\ 2 + 5 \sin \theta \sin \varphi \\ 1 + 5 \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \theta \in -\pi, +\pi, \varphi \in 0, \pi$$

Lab.: verificare che la normale alla superficie sferica in un punto P coincide col vettore v di estremi il centro e P, dove P è un generico punto sulla sfera

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Suggerimento: verificare che il vettore v è ortogonale al piano tangente in P_0 , i cui vettori di giacitura sono le colonne della matrice jacobiana

$$J_{\varphi, \theta} = 5 \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta & -\sin \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi \sin \theta & +\sin \varphi \cos \theta \\ -\sin \varphi & 0 \end{pmatrix}$$

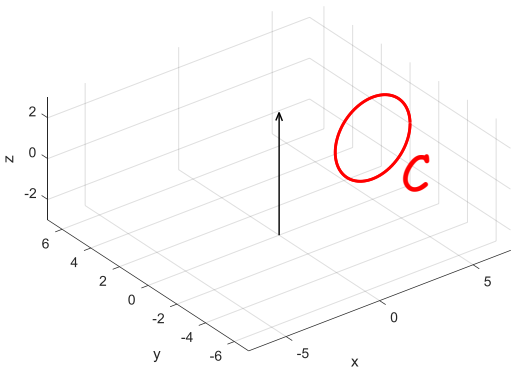
$$\begin{pmatrix} \cos \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta & -\sin \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi \sin \theta & +\sin \varphi \cos \theta \\ -\sin \varphi & 0 \end{pmatrix} =$$

v ortogonale a $\mathcal{R}(J)$!

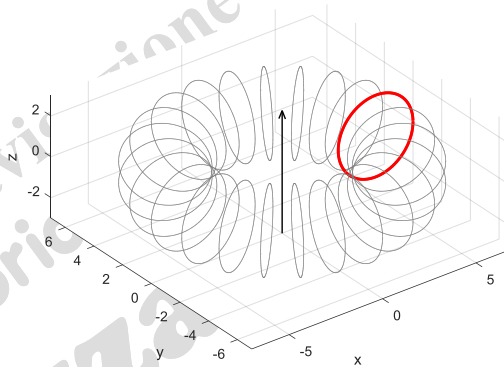
$$= \begin{bmatrix} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \varphi \cos \varphi - \sin \varphi \cos \varphi & \sin \varphi^2 - \sin \theta \cos \theta + \sin \theta \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esercizio: ripetere questi calcoli con il Toolbox Simbolico di MATLAB

Toro o toroide



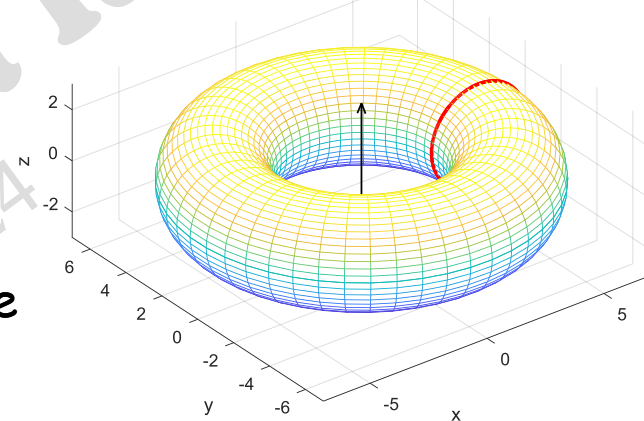
$$C = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \cos \theta \\ 0 \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in -\pi, +\pi$$



Se si ruota intorno all'asse z una circonferenza C nel piano $\langle x, z \rangle$ di centro $(a, 0, 0)$ e raggio r con $a > r > 0$, si ottiene un **toro** di equazioni parametriche:

$$S = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + r \cos \theta \cos \varphi \\ a + r \cos \theta \sin \varphi \\ r \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \theta, \varphi \in -\pi, +\pi$$

Il **toro** è centrato nell'origine. Lo si può spostare ovunque mediante un'opportuna **traslazione**



matrice Jacobiana:

$$J_{\theta, \varphi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} -\sin \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ -\sin \theta \sin \varphi & +\cos \varphi \\ \cos \theta & 0 \end{pmatrix}$$

MATLAB simbolico

`J=jacobian(S);`

`rank(J)`

$$\begin{pmatrix} -\sin \theta \cos \varphi & -\sin \varphi & a + \cos \theta \\ -\sin \theta \sin \varphi & +\cos \varphi & a + \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\text{rango}(J)=2$$

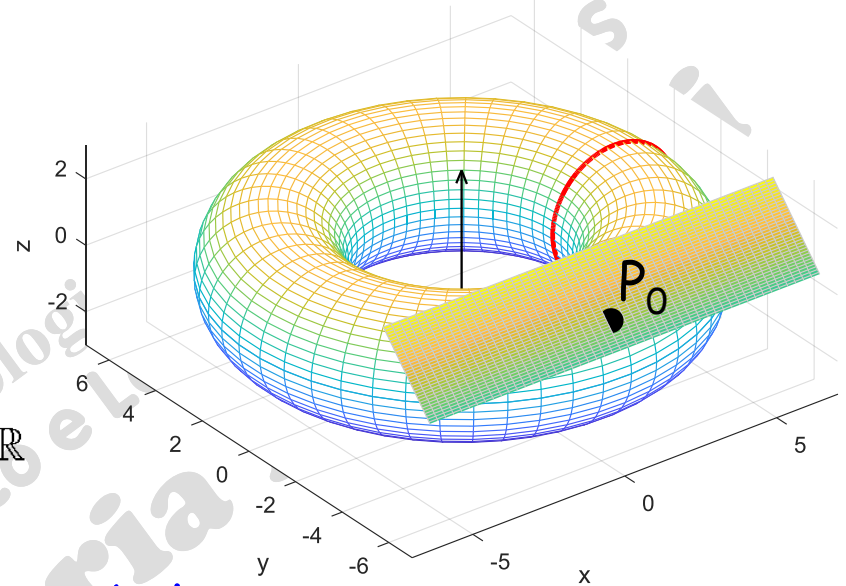
Il **toro** è sempre una superficie regolare

Piano tangente al toro

piano tangente al toro S in P_0
 per $\theta_0 = \pi/4$ e $\varphi_0 = -\pi/2$; $P_0 = (0, -\sqrt{2} - 5, \sqrt{2})$

$$P = P_0 + \lambda J_{:,1}(\theta_0, \varphi_0) + \mu J_{:,2}(\theta_0, \varphi_0)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} - 5 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \sqrt{2} + 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$



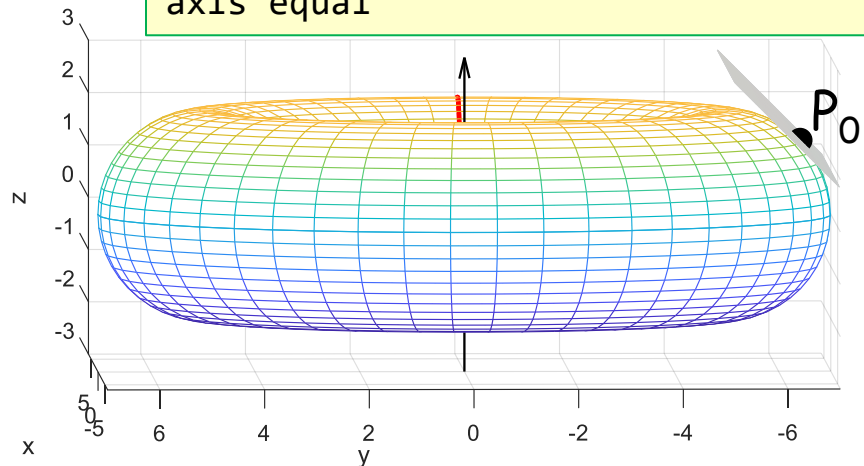
MATLAB simbolico

```
th0=pi/4; ph0=-pi/2;
P0 = subs(S,{phi,theta},{ph0,th0});
J = jacobian(S); % Jacobian
J0 = subs(J,{phi,theta},{ph0,th0})
```

```
J0 =
[2^(1/2) + 5,    0]
[      0, 2^(1/2)]
[      0, 2^(1/2)]
```

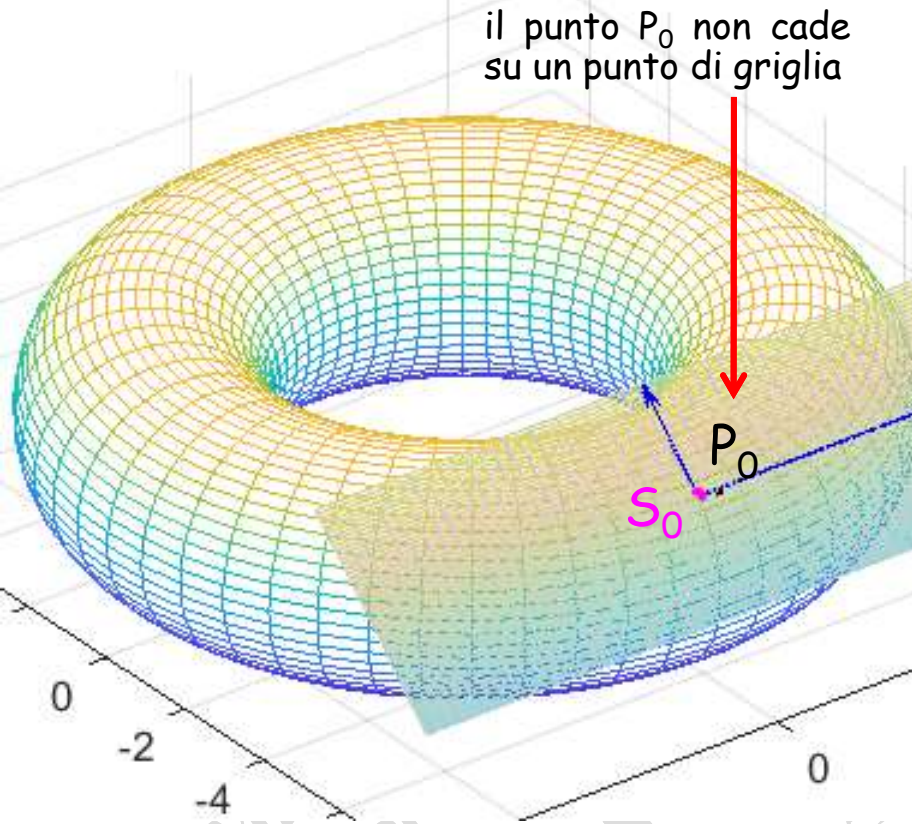
```
syms lambda mu real
P = P0 + J0*[lambda;mu];
hold on
ezsurf(P(1),P(2),P(3),[-1 1])
h=ezplot3(P0(1),P0(2),P0(3));
set(h,'Marker','.', 'Color','k')
```

```
a=5; r=2; syms phi theta real
S=[(a+r*cos(theta))*cos(phi);
  (a+r*cos(theta))*sin(phi);
  r*sin(theta)];
ezmesh(S(1),S(2),S(3),[-pi,+pi]);
axis equal
```



Piano tangente al toro

MATLAB numerico



il punto P_0 non cade su un punto di griglia

```
a=5; r=2; th0=pi/4; ph0=-pi/2;
TH=linspace(-pi,pi,55)'; PH=linspace(-pi,pi,55)';
[th,ph]=meshgrid(TH, PH); % griglia numerica
S = cat(3,(a+r*cos(th)).*cos(ph), ...
          (a+r*cos(th)).*sin(ph), ...
          r*sin(th));
mesh(S(:,:,1), S(:,:,2), S(:,:,3))
grid on; axis equal; hold on
[~,k]=min(abs(TH-th0)); % S0
[~,h]=min(abs(PH-ph0));
disp([th0 TH(k) ph0 PH(h)])
    0.7854 ≠ 0.8145    -1.5708 ≠ -1.629
S0 = [S(h,k,1);S(h,k,2);S(h,k,3)];
P0 = [(a+r*cos(th0)).*cos(ph0); ...
      (a+r*cos(th0)).*sin(ph0); ...
      r*sin(th0)];
disp([P0 S0])
    3.9276e-16    -0.37053
    -6.4142 ≠ -6.3617
     1.4142     1.4547
plot3(P0(1),P0(2),P0(3),'k')
plot3(S0(1),S0(2),S0(3),'m','MarkerSize',12)
```

vettori tangenti dello jacobiano

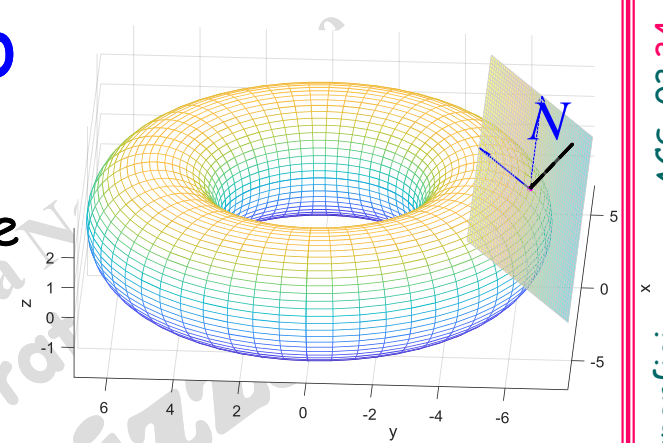
```
% rapporti incrementali parziali
dSdPH=diff([S([h h+1],k,1) S([h h+1],k,2) S([h h+1],k,3)])'./diff(PH([h h+1]));
dSdTH=diff([S(h,[k k+1],1);S(h,[k k+1],2);S(h,[k k+1],3)],1,2)./diff(TH([k k+1]));
J0 = [dSdPH dSdTH]; % Jacobiano numerico in S0
h=quiver3([S0(1) S0(1)],[S0(2) S0(2)],[S0(3) S0(3)],J0(1,:),J0(2,:),J0(3,:),0); set(h,'Color','b')
```

piano tangente in S_0

```
syms lambda mu real
P=S0+J0*[lambda;mu];
ezsurf(P(1),P(2),P(3),[-3 3])
```

Normale al toro

Si calcola una base per la normale N come vettore ortogonale al piano tangente in S_0



$$N : P = S_0 + \lambda d, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \iff J \begin{pmatrix} \varphi_h \\ \theta_k \end{pmatrix}^T d = 0 \quad \text{condizione di ortogonalità}$$

$$\iff d \in \mathcal{N}(J^T) = \text{Spazio Nullo Sinistro di } J(\varphi_h, \theta_k)$$

$\mathcal{N}(A)$: Spazio Nullo di una matrice A
 $\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = \underline{0}\} \quad \mathcal{N}(A) \subseteq \mathbb{R}^n$

$\mathcal{N}(A^T)$: Spazio Nullo Sinistro di una matrice A
 $\mathcal{N}(A^T) = \{y \in \mathbb{R}^m : A^T y = \underline{0}\} \quad \mathcal{N}(A^T) \subseteq \mathbb{R}^m$

MATLAB numerico

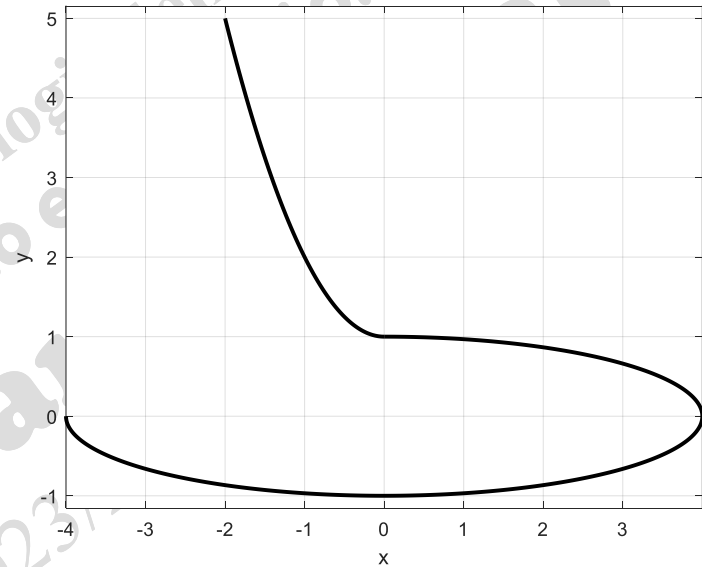
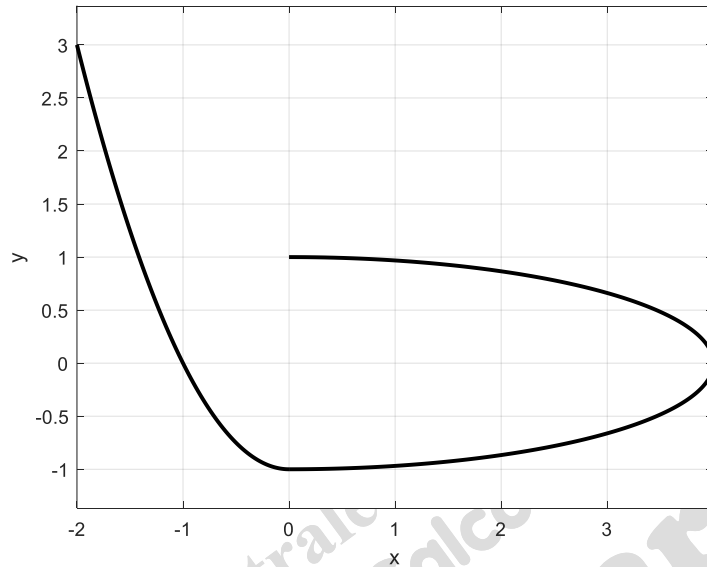
```
% rapporti incrementali parziali
dSdPH=diff([S([h h+1],k,1) S([h h+1],k,2) S([h h+1],k,3)])'./diff(PH([h h+1]));
dSdTH=diff([S(h,[k k+1],1);S(h,[k k+1],2);S(h,[k k+1],3)],1,2)./diff(TH([k k+1]));
J0 = [dSdPH dSdTH]; % Jacobiano numerico in S_0
d = null(J0');
```

... oppure mediante il prodotto vettoriale delle colonne di $J(\varphi_0, \theta_0)$

```
% rapporti incrementali parziali
dSdPH=diff([S([h h+1],k,1) S([h h+1],k,2) S([h h+1],k,3)])'./diff(PH([h h+1]));
dSdTH=diff([S(h,[k k+1],1);S(h,[k k+1],2);S(h,[k k+1],3)],1,2)./diff(TH([k k+1]));
J0 = [dSdPH dSdTH]; % Jacobiano numerico in S_0
d = cross(J0(:,1),J0(:,2)); % prodotto vettoriale
```

Curve "a tratti"

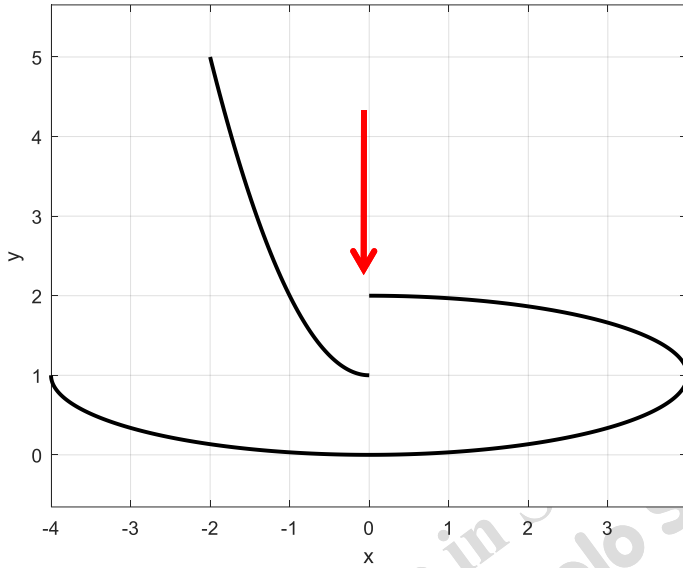
Sono regolari?



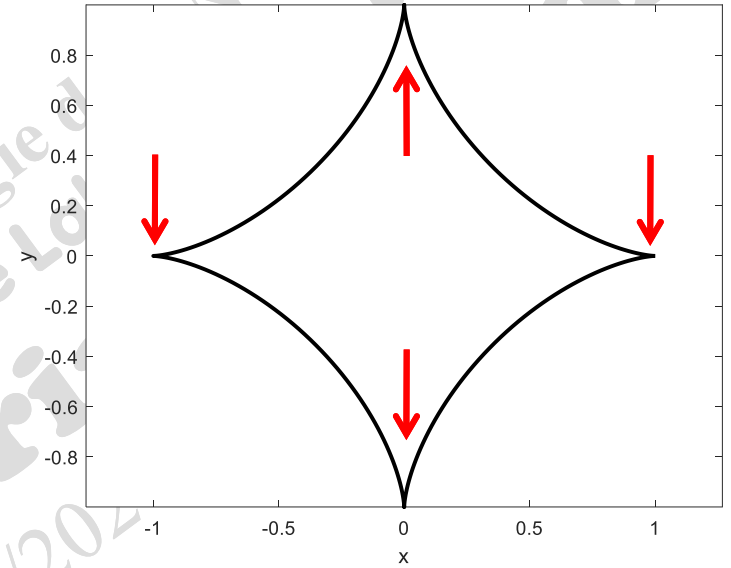
Nelle applicazioni si costruiscono delle curve formate da più archi di curve diverse che si raccordano in certi punti (ad es.: Bezier, splines e B-splines, NURBS).

Curve "a tratti"

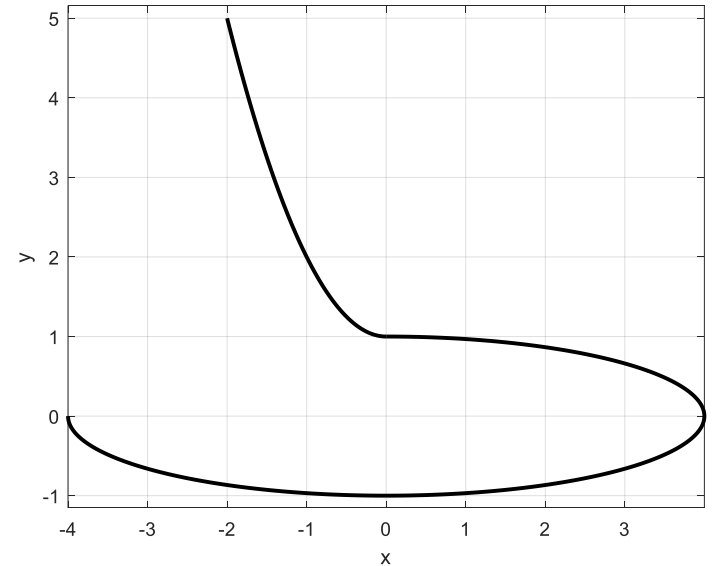
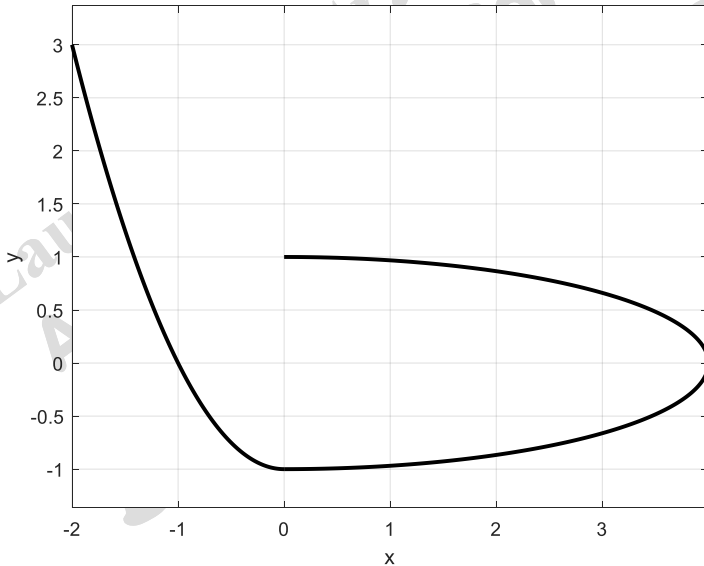
curva non continua



curva continua, derivata non continua



curva continua; derivata ?



Curve "a tratti"

Nei punti di raccordo fra due curve si distingue fra:

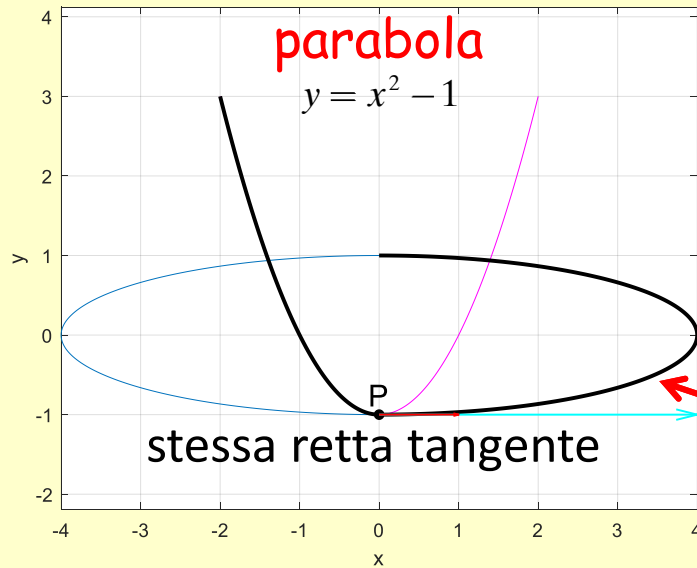
- ❑ Continuità geometrica: i vettori tangente di sinistra e di destra hanno uguale direzione (ma diverso modulo e/o verso).
- ❑ Continuità parametrica: i vettori tangente di sinistra e di destra sono uguali.

Nella **computer graphics** è spesso sufficiente la **continuità geometrica**.

Curve "a tratti"

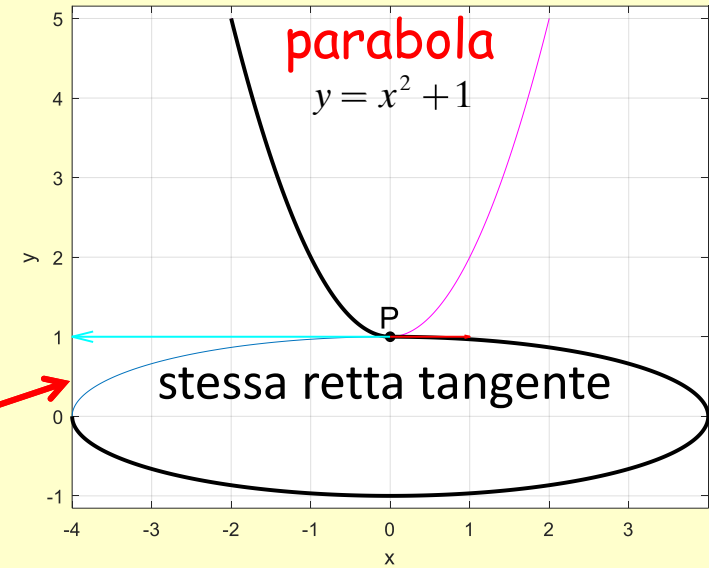
curve con continuità geometrica

Geometrical continuity at P(0,-1) between the two curves



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

Geometrical continuity at P(0,+1) between the two curves



vettore derivata di uguale direzione e verso, ma di modulo diverso

vettore derivata di uguale direzione, ma di modulo diverso e verso opposto

vettore tangente dx ellisse in P(0,-1):

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \sin -\frac{\pi}{2} \\ +\cos -\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

vettore tangente sx parabola in P(0,-1):

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

vettore tangente dx ellisse in P(0,1):

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \sin \frac{\pi}{2} \\ +\cos \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

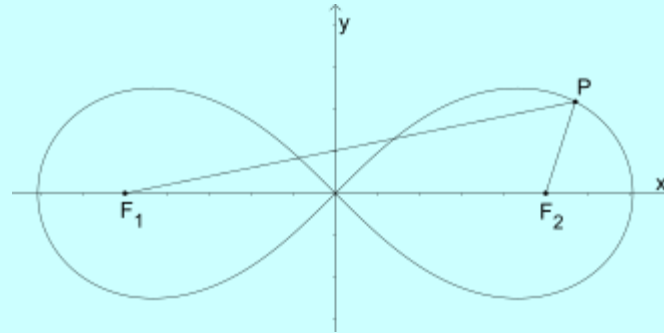
vettore tangente sx parabola in P(0,1):

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lemniscata di Bernoulli

Nel piano Euclideo, la *Lemniscata di Bernoulli* è il luogo geometrico dei punti P , tali che il prodotto delle loro distanze da due punti fissi F_1 e F_2 , detti **fuochi della curva**, è costante:

$$PF_1 \cdot PF_2 = c^2 \quad \text{dove} \quad F_1F_2 = 2c$$



Per semplicità, conviene scegliere il sistema di riferimento come nella figura sopra, con i fuochi come punti opposti sull'asse x . Ne segue che l'origine $(0,0)$ appartiene alla curva.

Posto $a^2=2c^2$, allora la *Lemniscata* è descritta da varie equazioni:

❖ *Equazione in coordinate cartesiane:*

$$x^2 + y^2 - a^2 \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = 0$$

❖ *Equazione in coordinate polari:*

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad r = \pm a \sqrt{\cos 2\theta} \quad \Rightarrow \quad \cos 2\theta \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta \in [-\pi/4, +\pi/4]$$

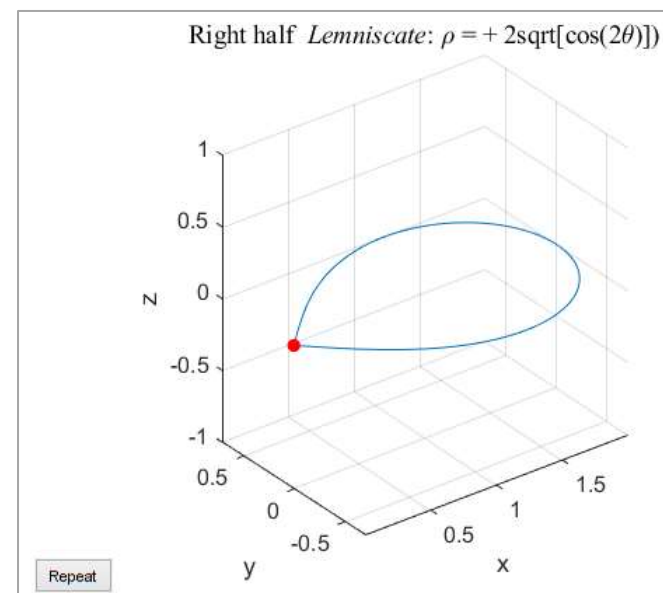
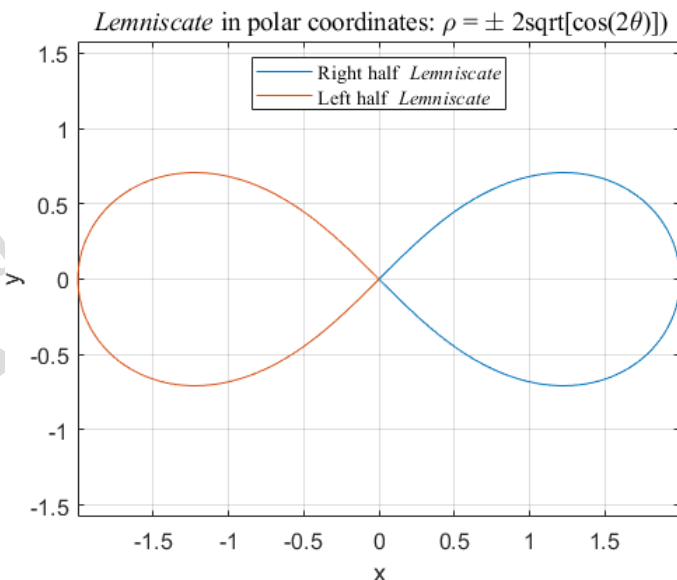
❖ *Equazione Parametrica per $t \in [-\pi, +\pi]$:*

$$x = \frac{a \cos t}{1 + \sin^2 t}, \quad y = \frac{a \sin t \cos t}{1 + \sin^2 t}$$

Lemniscata di Bernoulli: MATLAB ezplot

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta, \quad \cos 2\theta \geq 0 \Leftrightarrow \theta \in -\pi/4, +\pi/4$$

```
a=2; syms th real codice 1a: coordinate polari
assume(th >= -pi/4 & th <= pi/4) % to guarantee cos(2*th) >= 0
r=a*sqrt(cos(2*th)); % r^2 = a^2*cos(2*th) ==> r = ± ...
x=r.*cos(th); y=r.*sin(th); % r>0
figure(1); clf
h1=ezplot(x,y,[-pi/4 +pi/4]); grid on; axis equal; hold on
h2=ezplot(-x,-y,[-pi/4 +pi/4]); % r<0
legend([h1;h2], 'Right half {\it Lemniscate}', 'Left half {\it Lemniscate}');
title(['{\it Lemniscate} in polar coordinates: r = \pm' num2str(a) ...
'*\rho=a*sqrt[cos(2\theta)]'], 'FontName', 'Times New Roman', 'FontWeight', 'normal')
figure(2); clf; ezplot3(x,y,0*th,[-pi/4,pi/4], 'animate'); axis equal
title(['Right half {\it Lemniscate}: \rho = +' num2str(a) 'sqrt[cos(2\theta)]'], ...
'FontName', 'Times New Roman', 'FontWeight', 'normal', 'FontSize', 14)
```

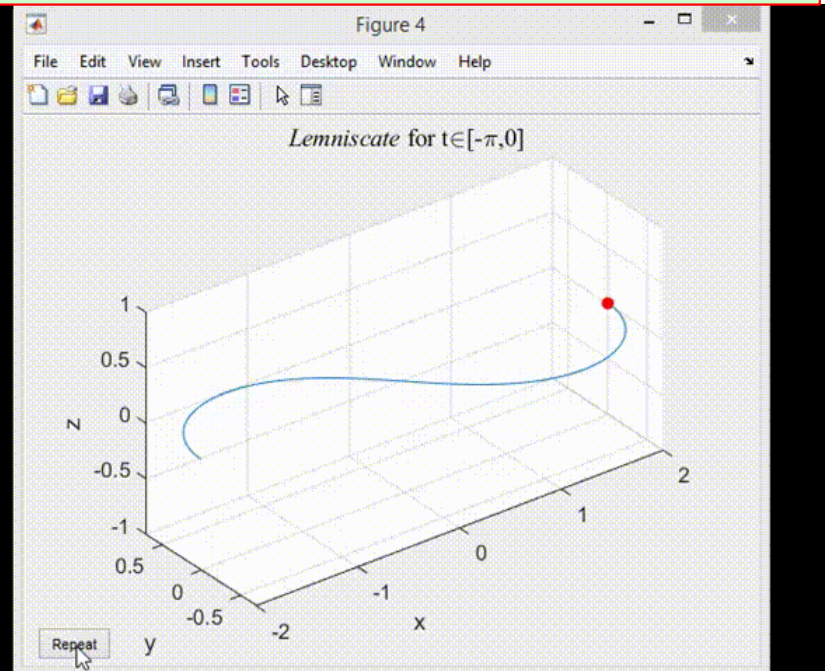
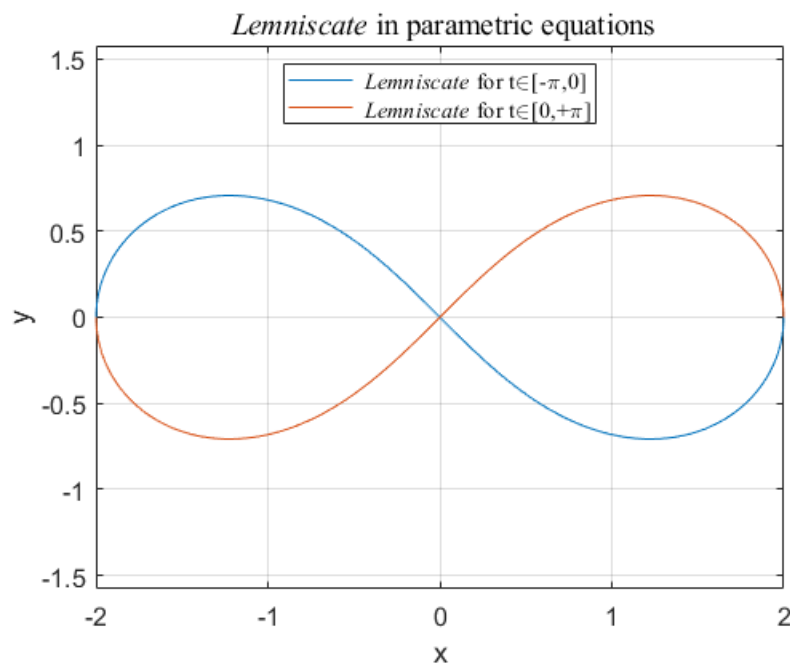


Lemniscata di Bernoulli: MATLAB ezplot

$$x = \frac{a \cos t}{1 + \sin^2 t}, \quad y = \frac{a \sin t \cos t}{1 + \sin^2 t} \quad t \in [-\pi, +\pi]$$

```
a=2; syms t real
x=a*cos(t)./(1+sin(t).^2); y=a*sin(t).*cos(t)./(1+sin(t).^2);
figure(3); clf
h1=ezplot(x,y,[-pi 0]); axis equal; grid on; hold on; h2=ezplot(x,y,[0 pi]);
HL=legend([h1;h2],'\it Lemniscate for t\in[-\pi,0]', ...
          '\it Lemniscate for t\in[0,+\pi]');
title('\it Lemniscate in parametric equations','FontName', ...
      'Times New Roman','FontWeight','normal','FontSize',14)
figure(4); clf; ezplot3(x,y,0*t,[-pi 0],'animate'); axis equal
title('\it Lemniscate for t\in[-\pi,0]','FontName','Times New Roman', ...
      'FontWeight','normal','FontSize',14)
```

codice 2a: equazioni parametriche



Lemniscata of Bernoulli: MATLAB plot

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta, \quad \cos 2\theta \geq 0 \Leftrightarrow \theta \in -\pi/4, +\pi/4$$

```
a=2; N=25; th=linspace(-pi/4,pi/4,N)';  
r=a*sqrt(cos(2*th)); % r^2 = a^2*cos(2*th) ==> r = ± ...  
th=[th; -th]; r=[r; -r];  
xi=r.*cos(th);  
yi=r.*sin(th);  
figure(1); clf; h=plot(xi(1),yi(1),'sb'); grid on; axis equal; hold on  
set(h,'MarkerSize',10,'LineWidth',1)  
axis([-2.25 2.25 -1.77 1.77]); set(gca,'FontSize',14)  
h=plot(xi,yi,'r-'); set(h,'MarkerSize',18,'LineWidth',1);  
title('\it Lemniscate} in polar coordinates','FontName','Times New Roman', ...  
      'FontWeight','normal')
```

codice 1b: coordinate polari

$$x = \frac{a \cos t}{1 + \sin^2 t}, \quad y = \frac{a \sin t \cos t}{1 + \sin^2 t}$$

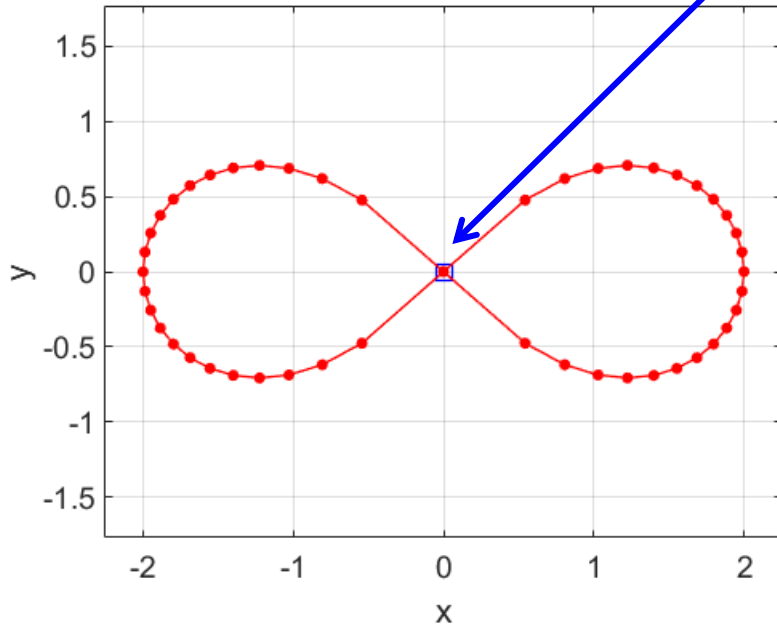
```
a=2; N=55; th=linspace(-pi,pi,N)';  
xi=a*cos(th)./(1+sin(th).^2);  
yi=a*sin(th).*cos(th)./(1+sin(th).^2);  
figure(2); clf; h=plot(xi(1),yi(1),'sb'); grid on; axis equal; hold on  
set(h,'MarkerSize',10,'LineWidth',1)  
axis([-2.25 2.25 -1.77 1.77]); set(gca,'FontSize',14)  
h=plot(xi,yi,'r-'); set(h,'MarkerSize',18,'LineWidth',1);  
title('\it Lemniscate} in parametric equations','FontName','Times New Roman', ...  
      'FontWeight','normal')
```

codice 2b: coordinate polari

Lemniscata di Bernoulli

primo e ultimo punto

Lemniscate in polar coordinates



Lemniscate parametric equations

