Equazioni e disequazioni con valore assoluto, esponenziali e logaritmi

Dipartimento di Scienze e Tecnologie

Università Parthenope

a.a. 22/23

Valore assoluto o Modulo

Ricordo che

Definizione (Valore assoluto o Modulo)

Il valore assoluto o modulo di un numero reale è quel numero così definito

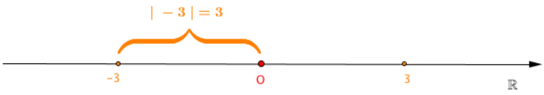
$$|a| = \max\{a, -a\} = \begin{cases} a & se\ a \geq 0, \\ -a & se\ a < 0. \end{cases}$$

Se a è positivo il massimo tra a e $-a$ è a stesso,
ma se $a < 0$ il massimo è $-a$.

Di conseguenza, il modulo di a è sempre positivo quale che sia $a \neq 0$.

Interpretazione geometrica del modulo

Il modulo di un numero x rappresenta quanto x dista dall'origine, il che ci spiega perché il modulo sia sempre positivo.



$|-3| = |3| = 3$, perché sia 3 che -3 distano 3 dall'origine O.

Quindi $|x| = |-x|$, dato che sia x che $-x$ distano dallo zero per la stessa quantità .

L'insieme $\{x \in \mathbb{R} : |x| < 3\}$ è formato da tutti i numeri reali che distano meno di 3 dall'origine, mentre l'insieme $\{x \in \mathbb{R} : |x| > 3\}$ è formato da tutti i numeri reali che distano più di 3 dell'origine.

Valore assoluto o Modulo

Proprietà del modulo

Dalla definizione seguono le seguenti importanti proprietà

- $|a| > 0$ e $|a| = 0$ se e solo se $a = 0$,
- $|a| = |-a|$,
- $|a + b| \leq |a| + |b|$ **disuguaglianza triangolare**

Equazioni con valore assoluto

Per farvi un'idea delle problematiche specifiche delle equazioni in cui compare un valore assoluto, provate a risolvere questi esercizi elementari:

1. $|x| = 1$
2. $|x| = -1$
3. $|x| = 0$

Se ora proviamo a risolvere $|x| = 1 - 2x$ che cosa cambia?

Dagli esempi elementari abbiamo capito che il comportamento delle equazioni con un valore assoluto dipende essenzialmente dal segno del membro di destra.
Questo ci suggerisce un modo per affrontare equazioni con il valore assoluto.

$$|f(x)| = g(x)$$

1. $\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \bigcup \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$
   più velocemente
   risolvo le due equazioni $f(x) = g(x)$ e $f(x) = -g(x)$ e *a posteriori* accetto solo quelle soluzioni $\bar{x}$ per cui risulta $g(\bar{x}) \geq 0$.
2. $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \bigcup \begin{cases} f(x) \leq 0 \\ -f(x) = g(x) \end{cases}$
   in alternativa
   risolvo l'equazione $f(x) = g(x)$ *a posteriori* accetto solo quelle soluzioni $\bar{x}$ per cui risulta $f(\bar{x}) \geq 0$,
   poi risolvo l'equazione $-f(x) = g(x)$ *a posteriori* accetto solo quelle soluzioni $\bar{x}$ per cui risulta $f(\bar{x}) \leq 0$,

Per farvi un'idea delle problematiche specifiche delle equazioni in cui compare un valore assoluto, provate a risolvere questi esercizi elementari:

1. $|x| < 1$
2. $|x| \geq 1$
3. $|x| \leq -1$
4. $|x| < -1$
5. $|x| \geq 0$
6. $|x| \leq 0$

Se ora proviamo a risolvere $|x| = 1 - 2x$ che cosa cambia?

Dagli esempi elementari abbiamo capito che il comportamento delle equazioni con un valore assoluto dipende essenzialmente da

- il segno del membro di destra,
- il verso della disuguaglianza.

Questo ci suggerisce un modo per affrontare equazioni con il valore assoluto.

$$|f(x)| \leq g(x)$$

1. $\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq g(x) \\ f(x) \geq -g(x) \end{cases}$

2. $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) \leq g(x) \end{cases} \bigcup \begin{cases} f(x) \leq 0 \\ -f(x) \leq g(x) \end{cases}$

Osservando il secondo metodo proposto, si vede che
nel primo sistema ho $g(x) \underset{2^a \text{ eq.}}{\geq} f(x) \underset{1^a \text{ eq.}}{\geq} 0$,
nel secondo sistema ho $g(x) \underset{2^a \text{ eq.}}{\geq} -f(x) \underset{1^a \text{ eq.}}{\geq} 0$,
quindi anche in questo caso tutte le soluzioni verificano anche $g(x) \geq 0$

Disequazioni con valore assoluto

$$|f(x)| \geq g(x)$$

1. $g(x) < 0 \quad \bigcup \quad \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq g(x) \end{cases} \quad \bigcup \quad \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq -g(x) \end{cases}$

2. $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) \geq g(x) \end{cases} \quad \bigcup \quad \begin{cases} f(x) \leq 0 \\ -f(x) \geq g(x) \end{cases}$

Disequazioni con valore assoluto

Esercizio (Risolvere le disequazioni)

$$|x-1| \leq 3x+4, \qquad \left|3x + \frac{x}{x-1} - 1\right| \geq 1, \qquad \frac{2x-5}{|x+1|} > 1,$$

$$\frac{x^2+|x|}{x-4} < 1, \qquad \sqrt{|x^2-5|} > x-5, \qquad |2x-3|+3 \leq |2x-1|.$$

Nel caso di disequazioni più complesse in cui compare il valore assoluto, solo in alcuni casi ci si può facilmente riportare alla forma standard considerata in precedenza (ad esempio nella terza disequazione proposta).
In generale, possono sempre esssere risolte usando la definizione di valore assoluto, e quindi impostando dei sistemi simili a quelli del secondo metodo proposto.

Potenze

Ricordiamo

Proprietà delle Potenze a esponente reale

Se $a, b > 0$ e $x, y \in \mathbb{R}$ si ha

0. $a^x > 0, \quad a^0 = 1, \quad a^1 = a, \quad 1^x = 1$
1. $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$
2. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ e $a^x : a^y = a^{x-y}$
3. $(a^x)^y = a^{x \cdot y} = (a^y)^x$

Rispetto alle equazioni, si ha

4. $a^x = b^x$ se e soltanto se $a = b$
   $a^x = a^y$ se e soltanto se $x = y$, a patto che $a \neq 1$

Rispetto alle disequazioni, si ha

5. Se $0 < a < b$ allora $\begin{cases} a^x < b^x & \text{per } x > 0 \\ a^x > b^x & \text{per } x < 0 \end{cases}$

   Se $x < y$ allora $\begin{cases} a^x < a^y & \text{per } a > 1 \\ a^x > a^y & \text{per } 0 < a < 1 \end{cases}$

Una semplice equazione esponenziale

Consideriamo un'equazione del tipo $a^x = b$

dove: a e b sono numeri reali assegnati
x è l' incognita

Equazioni di questo tipo si dicono equazioni esponenziali, poiché l' incognita compare dentro l' esponente.
Fino ad ora abbiamo trattato solo equazioni di tipo potenza, poiché gli esponenti erano sempre assegnati e l' incognita compariva solo nella base.

Affinché questa equazione sia ben posta è necessario che siano soddisfatte alcune condizioni

- $\boxed{a > 0}$ poiché solo per $a > 0$ la potenza a^x è definita per ogni valore di x
- $\boxed{b > 0}$ poiché se $a > 0$ segue che anche $a^x > 0$ (P4)
- $\boxed{a \neq 1}$ poiché se $a = 1$ allora $a^x = 1$ per ogni valore di x

Logaritmi

Sotto queste condizioni, si può dimostrare che l' equazione ammette sempre soluzione. Inoltre la soluzione è unica come conseguenza di P8.

DEFINIZIONE: Se $a > 0$, $a \neq 1$ e $b > 0$, chiamiamo logaritmo in base a di b l' unica soluzione dell' equazione $a^x = b$
Si usa il simbolo $x = \log_a b$

Dalla definizione di logaritmo e dalle proprietà delle potenze discendono le seguenti proprietà dei logartitmi:

P1 $\boxed{\log_a(a^b) = b}$ e $\boxed{a^{\log_a b} = b}$ (per definizione)

P2 $\boxed{\log_a b + \log_a c = \log_a(bc)}$ (da P2 potenze)

P3 $\boxed{\log_a(b^r) = r \log_a b}$ (da P3 potenze)

In particolare $\boxed{\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b}$ e dunque

P4 $\boxed{\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}}$

Dalle proprietà delle potenze deduciamo le proprietà dei logaritmi:

Proprietà dei Logaritmi

Se $a > 0$, $a \neq 1$, $t, s > 0$ si ha

1. $\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1$

1. perché
$a^0 = 1, \qquad a^1 = a$

Logaritmi

Dalle proprietà delle potenze deduciamo le proprietà dei logaritmi:

Proprietà dei Logaritmi

Se $a > 0,\ a \neq 1,\ t, s > 0$ si ha

1. $\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1$
2. $\log_a ts = \log_a t + \log_a s$

2. perché applicando l'esponenziale a entrambi i membri otteniamo

$$a^{\log_a ts} = ts \text{ e anche}$$

$$a^{\log_a t + \log_a s} = a^{\log_a t} a^{\log_a s} = t\, s$$

Dalle proprietà delle potenze deduciamo le proprietà dei logaritmi:

Proprietà dei Logaritmi

Se $a > 0,\ a \neq 1,\ t, s > 0$ si ha

1. $\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1$
2. $\log_a ts = \log_a t + \log_a s$
3. $\log_a t^k = k \cdot \log_a t$ per ogni $k \in \mathbb{R}$

3. perché applicando l'esponenziale a entrambi i membri otteniamo

$$a^{\log_a t^k} = t^k \quad \text{e anche}$$

$$a^{k \cdot \log_a t} = \left(a^{\log_a t}\right)^k = t^k$$

Dalle proprietà delle potenze deduciamo le proprietà dei logaritmi:

Proprietà dei Logaritmi

Se $a > 0,\ a \neq 1,\ t, s > 0$ si ha

1. $\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1$
2. $\log_a ts = \log_a t + \log_a s$
3. $\log_a t^k = k \cdot \log_a t$ per ogni $k \in \mathbb{R}$
4. $\log_a t/s = \log_a t - \log_a s$

3. perché applicando l'esponenziale a entrambi i membri otteniamo
$$a^{\log_a t^k} = t^k \quad \text{e anche}$$
$$a^{k \cdot \log_a t} = \left(a^{\log_a t}\right)^k = t^k$$

4. In particolare $\log_a 1/s = -\log_a s$ e dunque vale anche la quarta

Dalle proprietà delle potenze deduciamo le proprietà dei logaritmi:

Proprietà dei Logaritmi

Se $a > 0$, $a \neq 1$, $t, s > 0$ si ha

1. $\log_a 1 = 0$, $\quad \log_a a = 1$
2. $\log_a ts = \log_a t + \log_a s$
3. $\log_a t^k = k \cdot \log_a t$ per ogni $k \in \mathbb{R}$
4. $\log_a t/s = \log_a t - \log_a s$

Rispetto alle equazioni, si ha

4. $\log_a t = \log_a s$ se e solo se $t = s$

Dalle proprietà delle potenze deduciamo le proprietà dei logaritmi:

Proprietà dei Logaritmi

Se $a > 0,\ a \neq 1,\ t, s > 0$ si ha

1. $\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1$
2. $\log_a ts = \log_a t + \log_a s$
3. $\log_a t^k = k \cdot \log_a t$ per ogni $k \in \mathbb{R}$
4. $\log_a t/s = \log_a t - \log_a s$

Rispetto alle equazioni, si ha

4. $\log_a t = \log_a s$ se e solo se $t = s$

Rispetto alle disequazioni, si ha

5. Se $t < s$ allora $\begin{cases} \log_a t < \log_a s & \text{se } a > 1 \\ \log_a t > \log_a s & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$

Infine vale la

formula del cambiamento di base

6. $\log_b t = \log_b a \ \log_a t$

perché applicando l'esponenziale in base b si ha

$$b^{\log_b t} = t \quad \text{e anche}$$

$$b^{\log_b a \ \log_a t} = \left(b^{\log_b a}\right)^{\log_a t} = (a)^{\log_a t} = t$$

Infine vale la

formula del cambiamento di base

6. $\log_b t = \log_b a \ \log_a t$

In particolare scegliendo $t = b$ otteniamo

$$\underbrace{\log_b b}_{=1} = \log_b a \ \log_a b$$

e dunque

6'. $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$

Esercizio (Risolvere le disequazioni esponenziali)

$$5^x > 0, \qquad 100^{x-3/2} < 10^{-x}, \qquad \left(\frac{1}{3}\right)^{1-x} > 3,$$
$$2^{x^2+5x} < 4, \qquad 10^{3x} - 2 < 0, \qquad 3 \cdot 2^x < 4 \cdot 3^{x-1}.$$

Esercizio (Risolvere le disequazioni logaritmiche)

$$\log_3(x+2) < -1, \quad \log_{1/2}(x^2 - 2x - 3) + 2 < 0,$$
$$\log_{10}\frac{x+2}{x-1} > 1, \quad \log_2(x-2) + \log_2(x+1) < \log_2(x^2 - 4),$$
$$\log_3|x+1| > \log_3(x-2), \quad \log_5(x-1) - 2\log_5(x+1) - 2 > 0.$$

Qualche esercizio di riepilogo:

Esercizio (Risolvere le disequazioni)

$$\frac{x^4}{(x+1)^3} > 0, \qquad \frac{2x^2-7x-15}{|x^2-4|} < 0, \qquad \sqrt{|3x-4|} > 0,$$

$$2^{x^4-9}(3x-2) < 0, \qquad \frac{4x^2+3x-1}{(3x-1)^2} \leq 0, \qquad 3^{-x}\frac{x}{(2x+5)^3} < 0.$$