Prerequisiti di Matematica: Equazioni e disequazioni

Dipartimento di Scienze e Tecnologie

Università Parthenope

a.a. 22/23

Ripassiamo il vocabolario: Un' espressione in cui uno o più numeri non sono specificati si dice espressione algebrica.
Le espressioni algebriche più semplici sono i monomi.

Definizione (Monomio)

è un'espressione del tipo $\boxed{a\, {x_1}^{n_1} {x_2}^{n_2} \cdots {x_k}^{n_k}}$ *dove*

- a *sta per un numero reale fissato, detto coefficiente*
- x_1 , x_2 , $\cdots$, x_k *indicano dei numeri reali arbitrari, detti incognite o variabili indipendenti*
- n_1 , n_2 , $\cdots$, n_k *indicano dei numeri naturali fissati*

Esempio

$3x_1x_2^4$, $-x^3yz^2$, $\frac{1}{\sqrt{5}}x$, $-5xy^3x$ sono monomi,

$\frac{3x}{1+y^2}$, $x^2\sqrt{y}$, xy^2-2 non sono monomi.

Definizione

Un monomio si dice *in forma normale* *se è scritto nella forma*

$$a\,x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_k^{n_k}$$

cioè

- *presenta un solo coefficiente numerico*
- *ogni incognita compare una sola volta.*

Esempio

$3x_1x_2^4$, $-x^3yz^2$, $\frac{1}{\sqrt{5}}x$, sono in forma normale,

$-5xy^3x$, $\sqrt{2}xy\dfrac{xz^2}{3}$, non sono in forma normale.

Un po' di aritmetica...

Definizione

Un monomio si dice in forma normale se è scritto nella forma

$$a\, x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}$$

cioè

- *presenta un solo coefficiente numerico*
- *ogni incognita compare una sola volta.*

È sempre possibile scrivere un monomio in forma normale

Esempio

$$\underbrace{\sqrt{2}xy\frac{xz^2}{3}}_{\text{non in forma normale}} = \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{3}x^2yz^2}_{\text{in forma normale}}$$

Se un monomio è scritto in forma normale, diremo che

- a è la parte numerica
- $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}$ è la parte letterale
- n_1 è il grado del monomio relativo alla variabile x_1 ,
- n_2 il grado relativo a x_2, etc...
- $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ è il grado complessivo del monomio

Un po' di aritmetica...

Definizione

Un monomio si dice in forma normale se è scritto nella forma

$$a\, x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}$$

cioè

- *presenta un solo coefficiente numerico*
- *ogni incognita compare una sola volta.*

È sempre possibile scrivere un monomio in forma normale

Esempio

$$\underbrace{\sqrt{2}xy\frac{xz^2}{3}}_{\text{non in forma normale}} = \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{3}x^2yz^2}_{\text{in forma normale}}$$

Se un monomio è scritto in forma normale, diremo che

- $\sqrt{2}/3$ è la parte numerica
- x^2yz^2 è la parte letterale
- 2 è il grado del monomio relativo alla variabile x,
- 1 il grado relativo a y, etc...
- $2+1+2=5$ è il grado complessivo del monomio

Un po' di aritmetica...

Come si fanno le operazioni con i monomi?
Non c'è nulla di nuovo:

- sono operazioni fra numeri reali (anche se non ne conosciamo il valore numerico)
- si usano le proprietà commutativa e associativa di somma e prodotto fra numeri reali, più le proprietà delle potenze
- mettere monomi in forma normale semplifica la vita

Definizione (polinomio)

è una somma di monomi.

Possiamo scrivere i polinomi in una variabile nella forma generale

$$\boxed{a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \cdots a_n\, x^n}$$

- $a_0, a_1, \cdots a_n$ sono numeri reali fissati, detti *coefficienti*,
- x sta per un numero reale arbitrario, detto *incognita* o *variabile indipendente*, Il grado del polinomio è il maggiore fra i gradi dei monomi che lo compongono.

Un polinomio si dice ordinato (in modo crescente) se i monomi che lo compongono sono scritti in ordine di potenza crescente.

Esempio

$5 - 6x + 3x^4 - x^7$	è un polinomio di grado 7 ordinato
$2 + \frac{1}{5}x$	è un polinomio di grado 1 ordinato
$x^2 - 3x^5 + x^3$	è un polinomio di grado 5 non ordinato
$x - 3 + \sqrt{2}x - x^4$	è un polinomio di grado 4 non ordinato
$\frac{x-3}{1+x^2}, \quad \sqrt{x^4+1} - 3x$	non sono polinomi

Un po' di aritmetica...

Come si fanno le operazioni con i polinomi?
Non c'è nulla di nuovo:

- sono operazioni fra numeri reali (anche se non ne conosciamo il valore numerico)
- si usano le proprietà commutativa e associativa di somma e prodotto fra numeri reali, più le proprietà delle potenze,
- ordinare i polinomi semplifica la vita

Equazioni polinomiali in una variabile di 1^o grado

$$\boxed{ax + b = 0}$$

dove

- a e b sono numeri reali fissati,
- x è l'*incognita* del problema .

Esempio

$$-3x + 2 = 0 \qquad 2x = 1 \qquad 5x = 0$$

Formula risolutiva

$$\boxed{x = -b/a}$$

$a \neq 0$ $\Rightarrow$ c'è un'unica soluzione (eq. determinata)
$a = 0,\ b \neq 0$ $\Rightarrow$ non c'è soluzione (eq. impossibile)
$a = 0,\ b = 0$ $\Rightarrow$ ogni x è soluzione (eq. indeterminata)

Attenzione: quanto valgono a e b negli esempi?

Disequazioni polinomiali in una variabile di 1^o grado

$$\boxed{ax + b > 0} \qquad \boxed{ax + b < 0}$$

$$\boxed{ax + b \geq 0} \qquad \boxed{ax + b \leq 0}$$

dove

- a e b sono numeri reali fissati
- x è l'*incognita* del problema .

Esempio

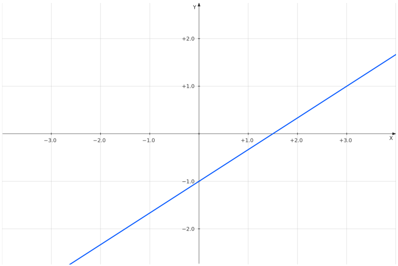
$$-3x + 2 > 0 \qquad 2x < 1 \qquad 5x \geq 0$$

Formula risolutiva per $\boxed{ax + b \geq 0}$ $\quad a \neq 0$

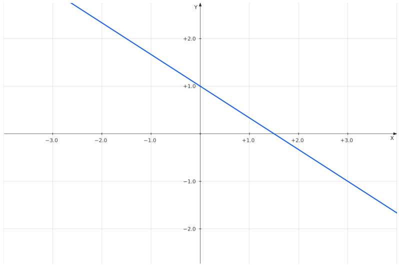
$a > 0 \;\Rightarrow\;$ sol. $x \geq -b/a$ cioè $x \in [-b/a, +\infty)$
$a < 0 \;\Rightarrow\;$ sol. $x \leq -b/a$ cioè $x \in (-\infty, -b/a]$

Interpretazione grafica:

$a > 0:$



$a < 0:$

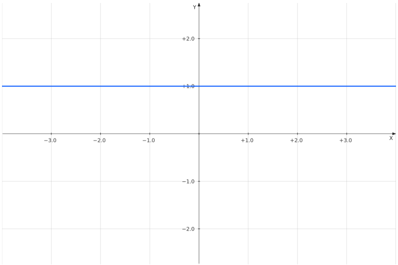


Formula risolutiva per $\boxed{ax + b \geq 0}$ $\quad a = 0$

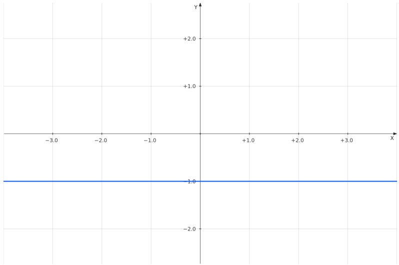
$a = 0$, $b \geq 0 \Rightarrow$ sol. ogni x cioè $x \in \mathbb{R}$
$a = 0$, $b < 0 \Rightarrow$ non c'è sol. cioè $x \in \emptyset$

Interpretazione grafica:

$b \geq 0$:



$b < 0$:



Equazioni polinomiali in una variabile di 2^o grado

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

dove

- a, b e c sono numeri reali fissati, con $a \neq 0$,
- x è l'*incognita* del problema .

Esempio

$$3x^2 + x - 2 = 0 \qquad -x^2 + 2x = 1 \qquad 5x^2 - x = 0$$

Formula risolutiva

$$\boxed{x_{\pm} = \left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right)/2a}$$

$\Delta = b^2 - 4ac > 0 \;\Rightarrow\;$ ci sono due sol.

$\Delta = b^2 - 4ac = 0 \;\Rightarrow\;$ c'è una sol. $x = -b/2a$

$\Delta = b^2 - 4ac < 0 \;\Rightarrow\;$ non cè sol.

Disquazioni polinomiali in una variabile di 2^o grado

$$\boxed{ax^2 + bx + c > 0} \qquad \boxed{ax^2 + bx + c < 0}$$

$$\boxed{ax^2 + bx + c \geq 0} \qquad \boxed{ax^2 + bx + c \leq 0}$$

dove

- a, b e c sono numeri reali fissati, con $a \neq 0$,
- x è l'*incognita* del problema

Esempio

$$3x^2 + x - 2 > 0 \qquad -x^2 + 2x < 1 \qquad 5x^2 - x \geq 0$$

Formula risolutiva per

$$\boxed{ax^2 + bx + c \geq 0}$$

nel caso in cui $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

se $a > 0$: sol. $x \leq x_-$ **o** $x \geq x_+$ cioè $x \in (-\infty, x_-] \bigcup [x_+, +\infty)$
se $a < 0$: sol. $x_- \leq x \leq x_+$ cioè $x \in [x_-, x_+]$

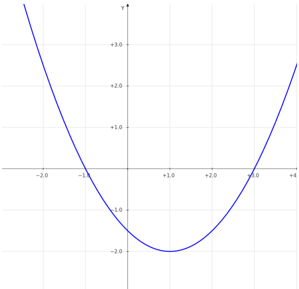
Motivazione: Dalle formule di fattorizzazione

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_-)(x - x_+)$$

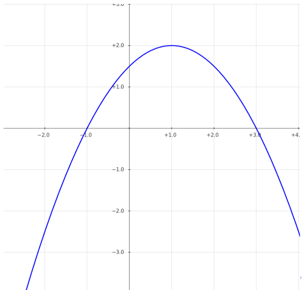
e la formula risolutiva si deduce dalla regola del segno.

Interpretazione grafica:

$a > 0$:



$a < 0$:



Equazioni e disequazioni

Formula risolutiva per

$$\boxed{ax^2+bx+c \geq 0}$$

nel caso in cui $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

se $a > 0$: sol. ogni x cioè $x \in \mathbb{R}$
se $a < 0$: sol. $x = -b/2a$

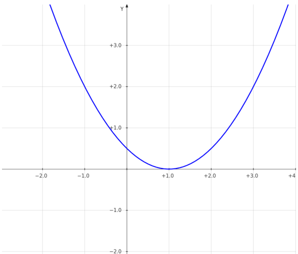
Motivazione: Dalle formule di fattorizzazione

$$ax^2+bx+c = a(x+b/2a)^2$$

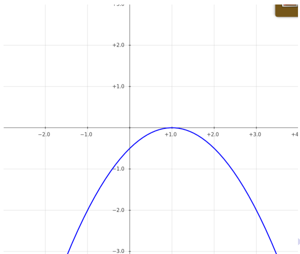
e la formula risolutiva si deduce dalla regola del segno (il quadrato di un numero diverso da zero è sempre positivo!)

Interpretazione grafica:

$a > 0$:



$a < 0$:



Formula risolutiva per

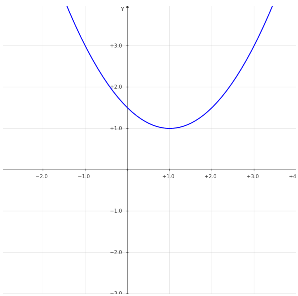
$$\boxed{ax^2 + bx + c \geq 0}$$

nel caso in cui $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

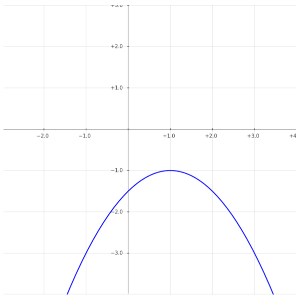
$a > 0$: sol. ogni x cioè $x \in \mathbb{R}$
$a < 0$: nessun x cioè $x \in \emptyset$

Interpretazione grafica:

$a > 0$:



$a < 0$:



Per le equazioni polinomiali in una variabile di grado più alto **non ci sono formule risolutive!**
Possiamo provare a risolverle usando degli stratagemmi

Equazioni/disequazioni biquadratiche:

Si risolvono mediante la **sostituzione** $t = x^2$.

Esercizio (Risolvere)

$$x^4 + x^2 - 12 = 0 \qquad\qquad x^4 - 4x^2 \geq 0$$

Equazioni/disequazioni di grado abbassabile:

Si risolvono mediante **fattorizzazione**.

Esercizio (Risolvere)

$$x^3 - 4x^2 - 5x = 0 \qquad\qquad 4x^5 - x^3 < 0$$

In generale bisogna ricorrere al **calcolo numerico**

Sistemi

Sistemi di equazioni/disequazioni:

La soluzione del sistema è data dall'**intersezione** fra le soluzioni delle singole equazioni/disequazioni.

Esercizio (Risolvere)

$$\begin{cases} x^2 - 9 \geq 0 \\ x + 1 < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 2x + 1 > 0 \\ x - x^2 \leq 0 \end{cases}$$

Espressioni razionali (o fratte)

Definizione (Espressione razionale)

è il rapporto fra due polinomi.

Le espressioni razionali in una sola variabile si scrivono nella forma generale

$$\boxed{\frac{a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + \cdots a_n\,x^n}{b_0 + b_1\,x + b_2\,x^2 + \cdots b_m\,x^m} = \frac{P(x)}{Q(x)}}$$

Esempio

$\frac{5-6x+3x^4}{2x+x^7}$, $\frac{2}{3-x^2}$, $x^2 + x^3$ sono espr. raz.

$\frac{\sqrt{x-3}+1}{2-x^4}$, $\frac{\sin x-3}{1+x^2}$, $\frac{2^x-1}{x+6}$ non sono espr. raz.

Espressioni razionali (o fratte)

Osservazione

A differenza di monomi i polinomi, le espressioni algebriche fratte non ammettono valori arbitrari di x

Esempio

Si consideri l'espressione algebrica $\frac{2}{x-5}$.
Sostituendo alla variabile x il valore numerico $x = 5$, si ottiene $\frac{2}{0}$.

Quest'operazione che non ha alcun significato!

Definizione

Il dominio di esistenza di un'espressione razionale $\frac{P(x)}{Q(x)}$ è l'insieme di tutti i valori della variabile x per cui risulta $\boxed{Q(x) \neq 0}$

In altre parole, indica quali valori numerici possiamo attribuire alla variabile x affinché l'operazione numerica $P(x) : Q(x)$ sia possibile.

Esempio

Il dominio di esistenza dell'espressione razionale $\frac{2}{x-5}$ è l'insieme $\mathbb{R} \setminus \{5\} = \{x \in \mathbb{R} \, : \, x \neq 5\}$.

Come si definiscono le operazioni di somma/differenza e prodotto/divisione fra espressioni algebriche?
Non c'è nulla di nuovo: sono le solite operazioni fra numeri reali.
Bisogna applicare le proprietà

Esercizio (Calcolare)

$$(3-x)\cdot\left(x+\frac{2}{3}x^2\right)+x^3-\frac{1}{5}x^2=\cdots$$

$$\frac{1+3x}{2-x}-\frac{5}{x}=\cdots$$

$$\frac{1+3x}{4-x^2}+\frac{x-1}{2x+x^2}=\cdots$$

$$(1-x)\frac{2-x}{1-3x+3x^2-x^3}+\frac{x}{1-2x+x^2}=\cdots$$

Iter consigliato per maneggiare le espressioni algebriche frazionarie:

- Fattorizzare i polinomi a denominatore (ed eventualmente a numeratore)
- Individuare il dominio di esistenza (è più facile dopo aver fattorizzato!)
- Semplificare (se possibile)
- Individuare il denominatore comune
- Scrivere l'espressione con il denominatore comune
- Calcolare le somme/differenze
- (eventualmente) Fattorizzare il polinomio ottenuto a numeratore e procedere con ulteriori semplificazioni (se possibile)

Fattorizzare un polinomio = scomporlo nel prodotto di più polinomi di grado inferiore (e quindi più maneggevoli)

Ricordiamo 3 tecniche per farlo:

- Raccoglimento a fattore comune
- Riconoscimento di prodotti notevoli
- Alcuni trinomi di secondo grado

Raccoglimento a fattore comune

Si tratta di individuare quei termini che dividono ogni monomio presente e "metterli in evidenza"

Esercizio

$4x^3 + 8x^2 - 32x = \cdots$

$x\,(x+1)\,(x-2) + x^2\,(x-1)\,(2-x) =$

Talvolta è preferibile procedere per <u>raccoglimenti parziali</u>

Esercizio

$$2x - 6y + 3xy - x^2 = \cdots$$

quadrato del binomio $\boxed{a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2}$

cubo del binomio $\boxed{a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3}$

differenza di quadrati $\boxed{a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)}$

somma/diff. di cubi $\boxed{a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)}$

Esercizio

$x^2 + 25 - 10x = \cdots$ $\qquad$ $9x^4 - 16 = \cdots$

$x^6 - 1 = \cdots$ $\qquad$ $\kappa^6 - 6\kappa^4 x + 12\kappa^2 x^2 - 8x^3 = \cdots$

$x^3 - 8 - x^2 + 2x = \cdots$

Alcuni trinomi di secondo grado

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a\,(x - x_+)\,(x - x_-)}$$

dove $x_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ sono le radici dell'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$

In pratica, dovrò calcolare il discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$:

- se $\Delta > 0$, calcolo le radici e applico la formula
- se $\Delta = 0$, applicando la formula ritrovo il quadrato del binomio
- se $\Delta < 0$ il trinomio assegnato è <u>irriducibile</u>

Esercizio

$x^2 - 3x + 2 = \cdots$ $\qquad$ $x^2 + 6x + 9 = \cdots$

$3x^2 + 2x - 1 = \cdots$ $\qquad$ $x^2 - 3x + 10 = \cdots$

$2x^4 - 3x^2 + 1 = \cdots$

Esercizio (Semplificare le espressioni algebriche)

$$\frac{3-x}{x-1}-\frac{x^2-5}{1-x^2}, \qquad \frac{6x}{2x^2-8}\cdot\frac{x+2}{4x^2}$$

$$\frac{x^2-2x-3}{x^2+x}+\frac{1-x}{x^2}, \qquad \frac{\dfrac{2x+3}{x^2-1}}{\dfrac{4x^2+12x+9}{8x^6-1}}$$

$$\frac{x^2-1}{x^2+1}:\frac{x+1}{x^2-1},$$

$$\left(\frac{x^2+2x-3}{x^2-4}-\frac{x-1}{x+2}\right):\left(1-\frac{x+1}{x+2}\right),$$

Equazioni fratte

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} = 0}$$

dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomi nell'incognita x.

- Imponiamo la condizione di esistenza $\boxed{Q(x) \neq 0}$
- Poiché un rapporto di annulla se, e solo se, si annulla il numeratore, risolviamo $\boxed{P(x) = 0}$

In sintesi, risolvere un'equazione fratta in formato standard è equivalente a risolvere il sistema:

$$\begin{cases} Q(x) \neq 0 \\ P(x) = 0 \end{cases}$$

In alternativa, possiamo risolvere l'equazione $P(x) = 0$
e a posteriori verificare che per le soluzioni $\bar{x}$ trovate si abbia $Q(\bar{x}) \neq 0$.

formato standard significa $\boxed{\dfrac{P(x)}{Q(x)} = 0}$.

Se così non è dobbiamo prima, attraverso passaggi algebrici, riportarci a questa forma.

Esempio (Risolvere l'equazione)

$$x + \frac{x-3}{1+x} = 1$$

(i) Individuiamo le condizioni di esistenza $1 + x \neq 0$, cioè $x \neq -1$

(ii) Mettiamo in forma standard

$$x + \frac{x-3}{1+x} = 1 \Leftrightarrow \quad x - 1 + \frac{x-3}{1+x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(x-1)(1+x) + x - 3}{1+x} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + x - 4}{1+x} = 0$$

formato standard significa $\boxed{\dfrac{P(x)}{Q(x)} = 0}$.

Se così non è dobbiamo prima, attraverso passaggi algebrici, riportarci a questa forma.

Esempio (Risolvere l'equazione)

$$x + \frac{x-3}{1+x} = 1$$

1. Individuiamo le condizioni di esistenza $x \neq -1$
2. Mettiamo in forma standard $\dfrac{x^2+x-4}{1+x} = 0$
3. Risolviamo l'equazione

$$x^2 + x - 4 = 0 \Leftrightarrow x_{\pm} = (-1 \pm \sqrt{1+16})/2 = (-1 \pm \sqrt{17})/2$$

formato standard significa $\boxed{\dfrac{P(x)}{Q(x)} = 0}$.

Se così non è dobbiamo prima, attraverso passaggi algebrici, riportarci a questa forma.

Esempio (Risolvere l'equazione)

$$x + \frac{x-3}{1+x} = 1$$

1. Individuiamo le condizioni di esistenza $x \neq -1$
2. Mettiamo in forma standard $\dfrac{x^2+x-4}{1+x} = 0$
3. Risolviamo l'equazione $x_\pm = (-1 \pm \sqrt{17})/2$
4. confrontiamo (i) e (iii) $\begin{cases} x \neq -1 \\ x_\pm = (-1 \pm \sqrt{17})/2 \end{cases}$

Risposta: $x = (\sqrt{17} - 1)/2$ o $x = -(\sqrt{17} + 1)/2$

Esercizio (Risolvere le equazioni fratte)

$$\frac{x-1}{x+1} = \frac{x+1}{x-1}$$

$$\frac{5-6x}{6x} + \frac{6-x}{3x^2+9x} - \frac{1}{4x-x^2} + 1 = 0$$

$$\frac{3x-1}{x^2+x-20} = \frac{5}{x-4}$$

Equazioni/disequazioni fratte

Disequazioni fratte

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} > 0}$$

dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomi nell'incognita x.

- Imponiamo la condizione di esistenza $\boxed{Q(x) \neq 0}$
- Poiché un rapporto è positivo se, e solo se, numeratore e denominatore hanno segno concorde, le soluzioni sono l'unione delle soluzioni di due sistemi di disequazioni

$$\boxed{\begin{cases} P(x) > 0 \\ Q(x) > 0 \end{cases} \quad \textbf{o} \quad \begin{cases} P(x) < 0 \\ Q(x) < 0 \end{cases}}$$

Osserviamo che le soluzioni di entrambi i sistemi al verificano certamente la condizione di esistenza.

Equazioni/disequazioni fratte

Disequazioni fratte

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} > 0}$$

dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomi nell'incognita x.

La soluzione di una disequazione fratta in formato standard è

$$\begin{cases} P(x) > 0 \\ Q(x) > 0 \end{cases} \bigcup \begin{cases} P(x) < 0 \\ Q(x) < 0 \end{cases}$$

Equazioni/disequazioni fratte

Disequazioni fratte

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} < 0}$$

dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomi nell'incognita x.

- Imponiamo la condizione di esistenza $\boxed{Q(x) \neq 0}$
- Ora il rapporto è negativo se, e solo se, numeratore e denominatore hanno segno discorde, dunque le soluzioni sono l'unione delle soluzioni di due sistemi di disequazioni

$$\boxed{\begin{cases} P(x) > 0 \\ Q(x) < 0 \end{cases} \quad \mathbf{o} \quad \begin{cases} P(x) < 0 \\ Q(x) > 0 \end{cases}}$$

Osserviamo che le soluzioni di entrambi i sistemi al verificano certamente la condizione di esistenza.

Disequazioni fratte

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} < 0}$$

dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomi nell'incognita x.

La soluzione di una disequazione fratta in formato standard è

$$\begin{cases} P(x) > 0 \\ Q(x) < 0 \end{cases} \bigcup \begin{cases} P(x) < 0 \\ Q(x) > 0 \end{cases}$$

Disequazioni fratte

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0}$$

dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomi nell'incognita x.

- Imponiamo la condizione di esistenza $\boxed{Q(x) \neq 0}$
- Ora possiamo anche ammettere che il numeratore si annulli, ma non il denominatore! Dunque le soluzioni sono l'unione delle soluzioni di due sistemi di disequazioni

$$\boxed{\begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) > 0 \end{cases} \quad \textbf{o} \quad \begin{cases} P(x) \leq 0 \\ Q(x) < 0 \end{cases}}$$

Di nuovo, le soluzioni di entrambi i sistemi al verificano certamente la condizione di esistenza.

Disequazioni fratte

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0}$$

dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomi nell'incognita x.

La soluzione di una disequazione fratta in formato standard è

$$\begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) > 0 \end{cases} \bigcup \begin{cases} P(x) \leq 0 \\ Q(x) < 0 \end{cases}$$

Esercizio (Risolvere le disequazioni fratte)

$$\frac{x-2}{3-x} > 1 \qquad \frac{1}{x+1} \geq \frac{x}{x-1}$$

$$\frac{4-x^2}{x^2-1} \geq 0 \qquad 1 - \frac{2x+1}{x-1} > \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{x+5} - \frac{1}{x-5} \leq 1 + \frac{1}{25-x^2} \qquad \frac{x^2(x^2-8x+15)}{5-x} \leq 0$$

Esercizio (Risolvere i sistemi)

$$\begin{cases} \frac{1}{5x-3} < 0 \\ -(x^2-x) \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2(2x-1) > 0 \\ \frac{3x+2}{x^2+4} \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} > 0 \\ \frac{x^2+x+4}{4-x^2} \geq 0 \end{cases}$$

Definizione (Espressione irrazionale)

è un'espressione algebrica in cui la variabile compare sotto il simbolo di radice n-esima.
La radice si intende in senso **aritmetico**.

Esempio

$\sqrt[3]{5-6x+3x^4}$, $\sqrt{3-x^2}$, $\frac{\sqrt{x-3}+1}{2-x^4}$ sono espr. irraz.

Definizione (Dominio di esistenza)

di un'espressione irrazionale $\sqrt[n]{f(x)}$ è l'insieme di tutti i valori della variabile x per cui la radice è ben definita.
Se n dispari, non ci sono restrizioni specifiche.
Se n pari, è necessario che il radicando risulti nonnegativo, cioè
$f(x) \geq 0$

Equazioni radicali

Per farvi un'idea delle problematiche specifiche delle equazioni di tipo radicale, provate a risolvere questi esercizi elementari:

1. $\sqrt[3]{x} = 1$
2. $\sqrt[3]{x} = -1$
3. $\sqrt{x} = 1$
4. $\sqrt{x} = -1$

Se ora proviamo a risolvere $\sqrt[3]{x} = 1 - x$ e $\sqrt{x} = 1 - x$ che cosa cambia?

Dagli esempi elementari abbiamo capito che il comportamento delle equazioni di tipo radicale dipende essenzialmente da due fattori:

- la parità della radice
- il segno del membro di destra

Proviamo allora a ragionare in astratto

Equazioni irrazionali - indice dispari

Consideriamo equazioni del tipo $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$

dove $f(x)$ e $g(x)$ sono espressioni nell' incognita x e n è dispari

ESEMPI: $\sqrt[3]{x^2 + 11x + 27} = x + 3$ $\quad \sqrt[3]{x - x^3} + x - 1 = 0$

In generale

- Ci si riporta alla **forma normale** $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$
- Non servono condizioni di esistenza, poiché $\sqrt[n]{f(x)}$ è ben definita per qualunque valore di $f(x)$
- Non servono condizioni di consistenza, poiché $\sqrt[n]{f(x)}$ può assumere qualunque valore
- Si sfrutta la relazione: $a^n = b^n$ se, e solo se, $a = b$.
  Ne segue che l'eq. assegnata è equivalente a

$$\boxed{f(x) = (g(x))^n}$$

Equazioni irrazionali - indice pari

Consideriamo equazioni del tipo $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$

dove $f(x)$ e $g(x)$ sono espressioni nell' incognita x e n è pari

ESEMPI: $\sqrt{5-x^2} = x-1$, $\sqrt[4]{x^4-3x^2-4} = x$,
$\sqrt{2-x+(x-1)^2} + 2x - 1 = 0$

In generale

- Ci si riporta alla **forma normale** $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$
- Si impone la condizione di esistenza $\boxed{f(x) \geq 0}$
  poiché $\sqrt[n]{f(x)}$ è definita solo se $f(x) \geq 0$
- Si impone la condizione di consistenza $\boxed{g(x) \geq 0}$
  poiché $\sqrt[n]{f(x)}$ può assumere solo valori nonnegativi
- Si sfrutta la relazione: $a^n = b^n$ se, e solo se, $a = b$ (se $a, b \geq 0$). Ne segue che l'eq. assegnata è verificata se $\boxed{f(x) = (g(x))^n}$

Equazioni irrazionali - indice pari

Da quanto abbiamo detto fin qui, un'equazione irrazionale di indice pari è equivalente ad un sistema misto (di due disequazioni e una equazione)

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) = (g(x))^n \end{cases}$$

OSSERVAZIONE: La seconda e la terza condizione, insieme, assicurano la prima condizione, in quanto

$$f(x) = (g(x))^n \geq 0 \text{ se } g(x) \geq 0.$$

Pertanto possiamo concludere che un'equazione irrazionale di indice pari è equivalente ad un sistema misto (di una disequazione e una equazione)

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = (g(x))^n \end{cases}$$

Per economizzare il lavoro, è spesso conveniente risolvere inizialmente l'equazione

$$f(x) = (g(x))^n$$

e solo *a posteriori* verificare se le soluzioni trovate $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots$ soddisfano la disequazione

$$g(\bar{x}) \geq 0.$$

Solo in caso affermativo $\bar{x}$ sarà una soluzione dell'equazione radicale iniziale.

Disequazioni radicali

Per farvi un'idea delle problematiche specifiche delle disequazioni di tipo radicale, provate a risolvere questi esercizi elementari:

1. $\sqrt[3]{x} > 1$
2. $\sqrt[3]{x} < -1$
3. $\sqrt{x} > 1$
4. $\sqrt{x} < -1$
5. $\sqrt{x} > -1$

Se ora proviamo a risolvere $\sqrt[3]{x} < 1 - x$ e $\sqrt{x} < 1 - x$ che cosa cambia?

Dagli esempi elementari abbiamo capito che il comportamento delle disequazioni di tipo radicale dipende da non due, ma tre fattori:

- la parità della radice
- il segno del membro di destra
- il verso della disuguaglianza

Proviamo allora a ragionare in astratto

Disequazioni irrazionali - indice dispari

Consideriamo disequazioni del tipo

$$\sqrt[n]{f(x)} < g(x) \quad \text{o} \quad \sqrt[n]{f(x)} \leq g(x) \quad o \quad \sqrt[n]{f(x)} > g(x) \quad \text{o} \quad \sqrt[n]{f(x)} \geq g(x)$$

dove $f(x)$ e $g(x)$ sono espressioni nell' incognita x e n è dispari

ESEMPI: $\sqrt[3]{2x-1} < 1 \qquad \sqrt[3]{x^3+1} - x - 1 \geq 0$

In generale

- Ci si riporta alla **forma normale** $\sqrt[n]{f(x)} \lesseqgtr g(x)$
- Non servono condizioni di esistenza, poiché $\sqrt[n]{f(x)}$ è ben definita per qualunque valore di $f(x)$
- Non servono condizioni di consistenza, poiché $\sqrt[n]{f(x)}$ può assumere qualunque valore
- Si sfrutta la relazione: $a^n \lesseqgtr b^n$ se, e solo se, $a \lesseqgtr b$.
  Ne segue che la diseq. assegnata è equivalente a

$$\boxed{f(x) \lesseqgtr (g(x))^n}$$

Disequazioni irrazionali - indice pari

Consideriamo dapprima disequazioni del tipo

$$\sqrt[n]{f(x)} < g(x) \quad \text{o} \quad \sqrt[n]{f(x)} \leq g(x)$$

ESEMPI: $\sqrt{x-1} < \frac{1}{4}$, $\sqrt[4]{x-1} \leq -3$, $4 - x > \sqrt{6x - x^2 + 16}$

In generale

- Ci si riporta alla **forma normale** $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$
- Si impone la condizione di esistenza $\boxed{f(x) \geq 0}$ poiché $\sqrt[n]{f(x)}$ è definita solo se $f(x) \geq 0$
- Si impone la condizione di consistenza $\boxed{g(x) \geq 0}$ poiché $\sqrt[n]{f(x)}$ può assumere solo valori nonnegativi
- Si sfrutta la relazione: $a^n < b^n$ se, e solo se, $a < b$ (se $a, b \geq 0$). Ne segue che l'eq. assegnata è verificata se $\boxed{f(x) < (g(x))^n}$

Disequazioni irrazionali - indice pari

In conclusione, una disequazione irrazionale di indice pari del tipo

$$\sqrt[n]{f(x)} < g(x)$$

è equivalente ad un sistema di tre disequazioni

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) < (g(x))^n \end{cases}$$

Disequazioni irrazionali - indice pari

Consideriamo infine disequazioni del tipo

$$\sqrt[n]{f(x)} > g(x) \quad \text{o} \quad \sqrt[n]{f(x)} \geq g(x)$$

ESEMPI: $\sqrt[6]{7-x} \geq -3$, $\sqrt{4x^2+3x-1} > 2x-3$, $x < \sqrt{6+x-x^2}+1$

In generale

- Ci si riporta alla **forma normale** $\sqrt[n]{f(x)} > g(x)$
- Si impone la condizione di esistenza $\boxed{f(x) \geq 0}$

  poiché $\sqrt[n]{f(x)}$ è definita solo se $f(x) \geq 0$

se $\boxed{g(x) < 0}$ la disequazione è soddisfatta senza ulteriori condizioni

se $\boxed{g(x) \geq 0}$ la disequazione è soddisfatta se inoltre

$$\boxed{f(x) > (g(x))^n}$$

Disequazioni irrazionali - indice pari

Da quanto fin qui detto, le soluzioni della disequazione assegnata si ottengono considerando tutte le soluzioni dei due sistemi seguenti

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \quad \bigcup \quad \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > (g(x))^n \end{cases}$$

OSSERVAZIONE: La seconda e la terza condizione dell'ultimo sistema, insieme, assicurano la prima condizione, in quanto

$$f(x) > (g(x))^n \geq 0 \text{ se } g(x) \geq 0.$$

Pertanto possiamo concludere che le soluzioni della disequazione assegnata si ottengono considerando tutte le soluzioni dei due sistemi seguenti

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \quad \bigcup \quad \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > (g(x))^n \end{cases}$$

Esercizio (Risolvere le equazioni)

$$x - 8 = \sqrt{x^2 - 9x + 15} \qquad |x - 8| = \sqrt{x^2 - 9x + 15}$$

Esercizio (Risolvere le disequazioni)

$$x \geq \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 1} \qquad \sqrt{x^2 - 4} < 2 - x$$

$$2 + x < \sqrt{x^2 + 2x} \qquad x - 2 \geq \sqrt{\frac{x^3 - 8}{x + 2}}$$