Prerequisiti di Matematica: Numeri e operazioni

Dipartimento di Scienze e Tecnologie

Università Parthenope

a.a. 22/23

I numeri che servono per contare sono i numeri naturali:

Definizione

L'insieme dei numeri naturali ($\mathbb{N}$) è definito mediante le proprietà

1. $0 \in \mathbb{N}$,
2. *se* $n \in \mathbb{N}$, *allora* $n+1 \in \mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

I numeri interi servono per fare il bilancio:

Definizione

L'insieme dei numeri interi ($\mathbb{Z}$) è formato dai numeri naturali e dai loro opposti, cioè

$$k \in \mathbb{Z} \textit{ se, e solo se, } k \in \mathbb{N} \textit{ oppure } -k \in \mathbb{N}.$$

$$\mathbb{Z} = \{\cdots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Osservazione

Positivi *sono i numeri maggiori di zero, cioè* $\{1, 2, 3, \dots\}$,
Negativi *sono i numeri minori di zero, cioè* $\{-1, -2, -3, \dots\}$.
0 *non è né positivo né negativo!*

Chiamiamo interi nonnegativi $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
interi positivi $\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, \dots\}$

Osservazione

Con i numeri interi possiamo fare ogni sorta di addizione e sottrazione, ad esempio:

$$4 + (-7) = 4 - 7 = -3 \qquad 4 - (-7) = 4 + 7 = 11$$

Con i numeri interi <u>non</u> possiamo fare ogni sorta di divisione, ad esempio:

$4 : 2 = 2$	*ok*
$5 : 2 = 2,5$	*<u>non</u> è un num. intero*
$10 : 3 = 3,33333333\cdots$	*<u>non</u> è un num. intero.*

Numeri razionali

Tutti i possibili risultati delle divisioni fra numeri interi, cioè le frazioni, formano l'insieme dei numeri razionali:

Definizione

$$\mathbb{Q} = \left\{ \tfrac{a}{b} = a : b \quad : \ a, b \in \mathbb{Z}, \ b \neq 0 \right\}$$

- *il numero a si dice numeratore*
- *b denominatore*

Osservazione

Ogni numero **intero** *è anche un numero* **razionale***, il cui denominatore (sottinteso) è uguale a 1. Ad esempio*

$$-7 = \frac{-7}{1}$$

Numeri razionali

Tutti i possibili risultati delle <u>divisioni</u> fra numeri interi, cioè le frazioni, formano l'insieme dei numeri razionali:

Definizione

$$\mathbb{Q} = \left\{ \tfrac{a}{b} = a : b \quad : \ a, b \in \mathbb{Z}, \ b \neq 0 \right\}$$

- *il numero a si dice numeratore*
- *b denominatore*

Osservazione

C'è una certa libertà sulla scelta dei segni di numeratore e denominatore. Ad esempio

$$-\frac{7}{3} = \frac{-7}{3} = \frac{7}{-3} \qquad e \qquad \frac{7}{3} = \frac{-7}{-3}$$

Definizione

Un numero razionale è
positivo se num. e den. hanno lo stesso segno $(a \cdot b > 0)$
negativo se num. e den. hanno segno discorde $(a \cdot b < 0)$

Numeri razionali

Tutti i possibili risultati delle divisioni fra numeri interi, cioè le frazioni, formano l'insieme dei numeri razionali:

Definizione

$$\mathbb{Q} = \left\{ \tfrac{a}{b} = a : b \quad : \ a, b \in \mathbb{Z}, \ b \neq 0 \right\}$$

- *il numero a si dice numeratore*
- *b denominatore*

Osservazione

C'è una certa libertà sulla scelta dei segni di numeratore e denominatore. Ad esempio

$$\frac{10}{5} = \frac{6}{3} = 2$$

Definizione

Due numeri razionali $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ si dicono equivalenti se

$$a \cdot d = b \cdot c$$

Possiamo scegliere una frazione fra tutte quelle equivalenti. Quale scegliamo?

Definizione (somma di numeri razionali)

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$$

Proprietà della somma

$\forall x, y, z \in \mathbb{Q}$ si ha

1. $\boxed{(x + y) + z = x + (y + z)}$ associativa
2. $\boxed{x + y = y + x}$ commutativa
3. $\boxed{x + 0 = x}$ 0 è l'elemento neutro
4. esiste l'inverso di x, cioè un numero $-x$ tale che: $\boxed{x + (-x) = 0}$

L'inverso rispetto alla somma (opposto) di x si indica con il simbolo $-x$.

Se $x = \frac{a}{b}$ si ha $\quad -x = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$

Definizione (prodotto di numeri razionali)

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Proprietà del prodotto

$\forall x, y, z \in \mathbb{Q}$ si ha

1. $\boxed{(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)}$ associativa
2. $\boxed{x \cdot y = y \cdot x}$ commutativa
3. $\boxed{x \cdot 1 = x}$ 1 è elemento neutro
4. esiste l'inverso di x, cioè un numero x^{-1} tale che $\boxed{x \cdot x^{-1} = 1}$ se $x \neq 0$

Se $a \neq 0$, l'inverso (o reciproco) di $\frac{a}{b}$ esiste, si indica con il simbolo $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$ e vale $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$

La "divisione" fra numeri razionali è la moltiplicazione per il reciproco:

Definizione (divisione fra numeri razionali)

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^{-1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \qquad se\ c \neq 0.$$

Si può anche indicare con una linea di frazione, cioè

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Proprietà distibutiva del prodotto rispetto alla somma

$\forall x, y, z \in \mathbb{Q}$ si ha

$$(x+y)\cdot z = x\cdot z + y\cdot z$$

Ricorda che:

$$(x+y)+z = x+(y+z) = x+y+z \quad \text{proprietà associativa della somma}$$

$$(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z) = x\cdot y\cdot z \quad \text{proprietà associativa del prodotto}$$

$$(x+y)\cdot z \neq x+(y\cdot z) = x+y\cdot z \quad \text{qui servono le parentesi!}$$

Esercizio

Calcolare

$$\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}:\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{7}{12}+\frac{6}{5},$$

$$\left(\frac{x-y}{x+1}-\frac{3}{x-1}\right)(x^2-1)+2y$$

Ricordiamo: un numero razionale a/b è positivo (ovvero maggiore di zero) se i numeri interi a e b hanno ugual segno.

Definizione (ordine fra numeri razionali)

Si dice che $\dfrac{a}{b} > \dfrac{c}{d}$ *se, e solo se,* $\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d} > 0$

Si dice poi che $\dfrac{a}{b} \geq \dfrac{c}{d}$ *se* $\dfrac{a}{b} > \dfrac{c}{d}$ *oppure* $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$

Calcolando $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$, significa che i numeri interi $ad - bc$ e bd hanno ugual segno.

Nella pratica, conviene riportarsi alla situazione in cui b e d sono entrambi positivi.
In tal caso $\dfrac{a}{b} > \dfrac{c}{d}$ se, e solo se, $ad - bc$ è positivo, cioè $ad > bc$.

Proprietà della relazione d'ordine $\geq$.

Per ogni $x, y, z \in \mathbb{Q}$ si ha

1. $\boxed{x \geq x}$ riflessiva
2. $\boxed{\text{se } x \geq y \text{ e } y \geq x, \text{ allora } x = y}$ antisimmetrica
3. $\boxed{\text{se } x \geq y \text{ e } y \geq z, \text{ allora } x \geq z}$ transitiva
4. $\boxed{x \geq y \text{ oppure } y \geq x}$ totale
5. $\boxed{\text{se } x \geq y, \text{ allora } x + z \geq y + z \text{ per ogni } z}$
6. $\boxed{\text{se } x \geq y, \text{ allora } \begin{cases} x \cdot z \geq y \cdot z & \text{se } z \geq 0, \\ x \cdot z \leq y \cdot z & \text{se } z \leq 0 \end{cases}}$

Esercizio (Mettere in ordine crescente)

$$\frac{1}{2}, \ \frac{1}{4}, \ \frac{3}{7}, \ \frac{-5}{2}, \ \frac{7}{3}, \ \frac{1}{-2}$$

Esercizio

Ci sono cinque persone con diverse situazioni patrimoniali. Oronzo è più ricco di Rocco, le cui ricchezze sono più modeste di quelle di Silvio, e quest'ultimo a sua volta è più danaroso di Piero. Quirino è meno benestante di Piero, ma più agiato di Oronzo. Chi è il terzo in ordine di ricchezza?

1. Piero
2. Rocco
3. Oronzo
4. Silvio
5. Quirino

Esercizio

Ci sono cinque persone con diverse situazioni patrimoniali. Oronzo è più ricco di Rocco, le cui ricchezze sono più modeste di quelle di Silvio, e quest'ultimo a sua volta è più danaroso di Piero. Quirino è meno benestante di Piero, ma più agiato di Oronzo. Chi è il terzo in ordine di ricchezza?

1. Piero
2. Rocco
3. Oronzo
4. Silvio
5. **Quirino**

Esercizio

Giocando a Risiko Giulio Cesare ha vinto più di suo nipote Augusto, ma non di Napoleone. Alessandro Magno ha vinto meno di Carlo Magno, ma più di Napoleone. Chi ha vinto di meno?

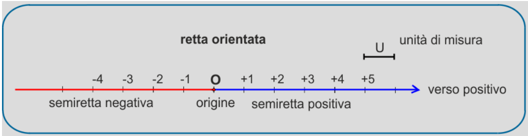
1. Carlo Magno
2. Alessandro Magno
3. Napoleone
4. Augusto
5. Giulio Cesare

Esercizio

Giocando a Risiko Giulio Cesare ha vinto più di suo nipote Augusto, ma non di Napoleone. Alessandro Magno ha vinto meno di Carlo Magno, ma più di Napoleone. Chi ha vinto di meno?

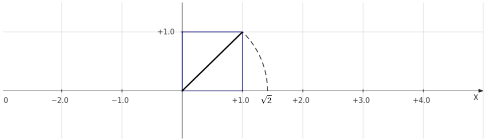
1. Carlo Magno
2. Alessandro Magno
3. Napoleone
4. **Augusto**
5. Giulio Cesare

Finalmente possiamo fare tutte le operazioni fondamentali!
Inoltre la relazione d'ordine ci permette di rappresentare ogni numero razionale sulla retta:



La corrispondenza fra numeri razionali e punti della retta è iniettiva, cioè a numeri diversi corrispondono punti diversi.

Possiamo dire che è suriettiva, cioè che ad ogni punto corrisponde un numero razionale? In altre parole, possiamo misurare qualsiasi lunghezza? NO!



Ad esempio, non sappiamo calcolare la lunghezza della diagonale di un quadrato di lato 1. Dal teorema di Pitagora $\ell = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$,

ma non esiste alcun numero razionale il cui quadrato faccia 2!

Per colmare questa lacuna dei numeri razionali (e molte altre...) si introducono i numeri reali ($\mathbb{R}$).
Per i nostri scopi, è sufficiente dire che i numeri reali sono tutti i numeri che possiamo scrivere come allineamento decimale (sia esso finito, infinito, periodico...).

Esempio

$-\frac{5}{2} = -2,5$ allineamento decimale finito

$\frac{1}{3} = 0,333333\cdots = 0,\bar{3}$ allineamento decimale infinito periodico

$\sqrt{2} = 1.4142135623\cdots$ allineamento decimale infinito non periodico

Sui numeri reali si assegnano somma, prodotto e relazione d'ordine in modo che valgano tutte le proprietà che abbiamo riconosciuto per i numeri razionali.

Questo ci permette di maneggiare i numeri reali (cioè "fare i calcoli") senza dover imparare nulla di nuovo.

Nella pratica per maneggiare i numeri reali è sufficiente conoscere le proprietà delle operazioni.

Esercizio

Quanto vale $$\left(\frac{x}{\frac{2}{3}} - 1\right) : \frac{x}{2y} - y?$$

Non serve sapere esattamente chi sono i numeri x e y per sapere che

$$\underset{\text{divisione}}{\overset{\text{def. di}}{=}} \left(\frac{3x}{2} - 1\right) \cdot \frac{2y}{x} - y \underset{\text{distributiva}}{\overset{\text{proprietà}}{=}} \frac{3x \cdot 2y}{2 \cdot x} - \frac{2y}{x} - y$$

$$= 3y - \frac{2}{x} - y \underset{\substack{\text{commutativa e}\\ \text{associativa}}}{\overset{\text{proprietà}}{=}} 2y - \frac{2}{x}$$

e, se mi fa comodo avere un'unica frazione

$$\underset{\text{distributiva}}{\overset{\text{proprietà}}{=}} 2\frac{xy - 1}{x}$$

Ma allora qual è la differenza?

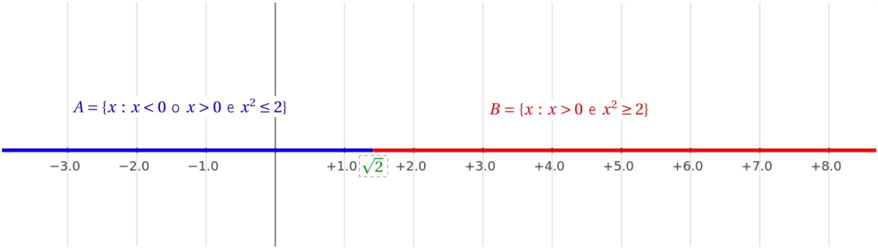
Assioma di completezza

Siano $A, B \subset \mathbb{R}$ tali che $A, B \neq \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \mathbb{R}$ e

$$a < b \quad \forall a \in A, \forall b \in B.$$

Allora esiste un unico $s \in \mathbb{R}$ che fa da elemento separatore:

$$a \leq s \leq b \quad \forall a \in A, \forall b \in B.$$



L'elemento separatore è l'estremo superiore dell'insieme A e l'estremo inferiore dell'insieme B.

C'è una corrispondenza biunivoca (cioè iniettiva **e** suriettiva) fra i numeri reali e la retta.

A partire dalle proprietà di somma, prodotto e relazione d'ordine è possibile dimostrare queste utili proprietà

Legge di annullamento del prodotto

$$x \cdot y = 0 \quad \text{se e solo se} \quad x = 0 \text{ o } y = 0$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

Regola del segno

$$x \cdot y > 0 \quad \text{se } x > 0 \text{ e } y > 0 \text{ o } x < 0 \text{ e } y < 0 \text{ (segno } \textbf{concorde}\text{)},$$
$$x \cdot y < 0 \quad \text{se } x > 0 \text{ e } y < 0 \text{ o } x < 0 \text{ e } y > 0 \text{ (segno } \textbf{discorde}\text{)}$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

Operazioni fra equazioni e disequazioni

Se $x = y$, allora

- $x + z = y + z$ per ogni $z \in \mathbb{R}$,
- $x \cdot z = y \cdot z$ per ogni $z \in \mathbb{R}$.

Se $x < y$, allora

- $x + z < y + z$ per ogni $z \in \mathbb{R}$,
- $x \cdot z < y \cdot z$ se $z > 0$, mentre $x \cdot z > y \cdot z$ se $z < 0$.

Definizione (Valore assoluto o Modulo)

Il valore assoluto o modulo di un numero reale è quel numero così definito

$$|a| = \max\{a, -a\} = \begin{cases} a & \textit{se } a \geq 0, \\ -a & \textit{se } a < 0. \end{cases}$$

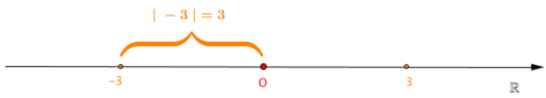
Se a è positivo il massimo tra a e $-a$ è a stesso,
ma se $a < 0$ il massimo è $-a$.

Di conseguenza, il modulo di a è sempre positivo quale che sia $a \neq 0$.

Valore assoluto o Modulo

Interpretazione geometrica del modulo

Il modulo di un numero x rappresenta quanto x dista dall'origine, il che ci spiega perché il modulo sia sempre positivo.



$|-3| = |3| = 3$, perché sia 3 che -3 distano 3 dall'origine O.

Quindi $|x| = |-x|$, dato che sia x che $-x$ distano dallo zero per la stessa quantità .

L'insieme $\{x \in \mathbb{R} : |x| < 3\}$ è formato da tutti i numeri reali che distano meno di 3 dall'origine, mentre l'insieme $\{x \in \mathbb{R} : |x| > 3\}$ è formato da tutti i numeri reali che distano più di 3 dell'origine.

Proprietà del modulo

Dalla definizione seguono le seguenti importanti proprietà

- $|a| > 0$ e $|a| = 0$ se e solo se $a = 0$,
- $|a| = |-a|$,
- $|a + b| \leq |a| + |b|$ **disuguaglianza triangolare**

Vogliamo precisare il significato della scrittura $\boxed{a^x}$ dove a (base) e x (esponente) sono numeri reali (con qualche restrizione...)

a^x: $x = n$ intero positivo

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ volte}}$$

a. Possiamo effettuare questa operazione per qualsiasi valore reale di a. Se $a = 0$, si ha $0^n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{Z}_+$.
b. Se $a = 1$, si ha $1^n = 1$ per ogni valore di $n \in \mathbb{Z}_+$.
Se $n = 1$, si ha $a^1 = a$ per ogni valore di $a \in \mathbb{R}$
c. Se $a > 0$, si ha $a^n > 0$ per ogni valore di $n \in \mathbb{Z}_+$
d. Se $a < 0$, si ha $\begin{cases} a^n > 0 & \text{se } n \text{ è pari,} \\ a^n < 0 & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$

Proprietà delle Potenze a esponente intero positivo

Se $a, b \in \mathbb{R}$ e $n, m \in \mathbb{Z}_+$ si ha

1. $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
2. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
3. $(a^n)^m = a^{n \cdot m} = (a^m)^n$

Rispetto alle equazioni, si ha

4. $a^n = b^n$ se e soltanto se $\begin{cases} a = \pm b & \text{per } n \text{ pari} \\ a = b & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases}$

   $a^n = a^m$ se e soltanto se $n = m$, $\underline{\text{ a patto che}}$ $a \neq 1$

Rispetto alle disequazioni, si ha

5. Se $0 \leq a \leq b$, allora $a^n \leq b^n$ per ogni valore di n.

   Invece, se $a \leq b < 0$, allora $\begin{cases} a^n \geq b^n & \text{per } n \text{ pari} \\ a^n \leq b^n & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases}$

Attenzione: $\underbrace{(5^2)^3}_{=5^6} \neq \underbrace{5^{(2^3)}}_{=5^8}$

a^x: $x = -n$ intero negativo

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

- (a) Possiamo effettuare questa operazione solo se $\boxed{a \neq 0!}$
- (b) Se $a = 1$, si ha $1^{-n} = 1$ per ogni valore di $n \in \mathbb{Z}_+$
- (c) Se $a > 0$, si ha $a^{-n} > 0$ per ogni valore di $n \in \mathbb{Z}_+$
- (d) Se $a < 0$, si ha $\begin{cases} a^{-n} > 0 & \text{se } n \text{ è pari,} \\ a^{-n} < 0 & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$

É facile convincersi che le propietá (1) (2) (3) (4) valgono anche per esponenti interi negativi (se $a, b \neq 0$). Per quel che riguarda la proprietà (5) invece abbiamo:

- (5') Se $0 \leq a \leq b$, allora $a^{-n} \boxed{\geq} b^{-n}$ per ogni valore di $n \in \mathbb{Z}_+$.

  Invece, se $a \leq b < 0$, allora $\begin{cases} a^{-n} \boxed{\leq} b^{-n} & \text{per } n \text{ pari} \\ a^{-n} \boxed{\geq} b^{-n} & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases}$

Applicando le proprietà 3 con $m = -1$ otteniamo

3' $(a^n)^{-1} = a^{-n} = (a^{-1})^n$, in altri termini $\frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$

e di conseguenza la proprietà 2 si estende alla divisione

2' $a^n : a^m = a^{n-m}$

Allora poniamo

a^x: $x = 0$

$$a^0 = 1$$

Infatti $0 = n - n$ e

$$a^0 = a^{n-n} = a^n : a^n = 1$$

Ne segue che la definizione è valida solo se $\boxed{a \neq 0!}$

Abbiamo così definito a^x per ogni $x \in \mathbb{Z}$.

Vogliamo definirlo anche per $x = m/n \in \mathbb{Q}$, in modo che valgano ancora le proprietà 1 2 3 4 5.
Ci basterà allora dare un significato alla scrittura $a^{\frac{1}{n}}$ con n intero positivo. Poi imponendo la proprietà 2 otterremo

a^x: $x = m/n$ razionale

$$a^{m/n} = (a^m)^{1/n} = \left(a^{1/n}\right)^m$$

La scelta della definizione di $a^{\frac{1}{n}}$ risulta obbligata. Infatti poiché $1 = n/n$, imponendo la proprietà 2 vediamo che

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a$$

Allora $a^{\frac{1}{n}}$ deve essere la "radice n-esima'di a, cioè quel numero x con la proprietà che

$$x^n = a$$

Definizione (Radice algebrica)

Per $n \in \mathbb{Z}_+$ *e* $a \in \mathbb{R}$ *fissati, si dice radice n-esima (algebrica) di* a *ogni (eventuale) soluzione* x *dell'equazione* $\boxed{x^n = a}$.
Talvolta la si indica con il simbolo $\sqrt[n]{a}$.

$\sqrt[n]{a}$: $n = 2$ (radice quadrata - algebrica, $\sqrt{a}$)

- se $a > 0$ l'eq. ha due soluzioni di uguale valore assoluto e segno opposto: $\sqrt{a} = \pm x$.
- se $a < 0$ l'eq. non ha soluzioni: non esiste $\sqrt{a}$.
- se $a = 0$ l'eq. ha una soluzione: $\sqrt{0} = 0$

Stesso comportamento per ogni n pari.

$\sqrt[n]{a}$: $n = 3$ (radice cubica - algebrica, $\sqrt[3]{a}$)

Per ogni valore di a l'eq. ha una soluzione. Inoltre

- $\sqrt[3]{a} > 0$ se e solo se $a > 0$.
- $\sqrt[3]{a} = 0$ se e solo se $a = 0$.

Stesso comportamento per ogni n dispari.

L'espressione "radice n-esima" (algebrica) può indicare **uno**, **due** o **nessun** valore, a seconda dei casi. Talvolta si crea la necessità che il simbolo di radice indichi un solo risultato.

Definizione (Radice aritmetica, ovvero $a^{\frac{1}{n}}$)

Se n pari e $a \geq 0$, l'unica radice n-esima (algebrica) **nonnegativa** *di a prende il nome di radice n-esima (aritmetica) di a.*
Se n dispari e $a \in \mathbb{R}$, l'unica radice n-esima (algebrica) di a prende anche il nome di radice n-esima (aritmetica) di a.

Attenzione! Lo stesso simbolo può indicare due cose diverse: la radice aritmetica e la radice algebrica

$\sqrt{25} = \pm 5$ (radice algebrica) , $\sqrt{25} = 5$ (radice aritmetica)
$\sqrt{x^2} = \pm x$ (radice algebrica) , $\sqrt{x^2} = |x|$ (radice aritmetica)
$\sqrt[3]{x^3} = x$ (radice algebrica e aritmetica)

Se non espressamente indicato, per noi sarà sempre

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} = \text{radice } n\text{-esima aritmetica}}$$

Potenze

ESERCIZIO: Semplificare le espressioni:

$$\left((1+a)^{2/3}\right)^{3/8} \quad (3-b)^{4/3} : (3-b)^{1/3} \quad \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt[6]{2}}$$

ESERCIZIO: Calcolare: $\sqrt[6]{64}$ $\quad \sqrt[6]{(-2)^6}$ $\quad \sqrt[3]{-40 \cdot 25}$

ESERCIZIO: L'espressione $\left(a^2 b^{1/3}\right)^{-1}$ è uguale a

$\square\ ab^{1/6}$ $\quad \square\ \dfrac{1}{ab^2}$ $\quad \square\ \dfrac{a^{-2}}{b^{1/3}}$ $\quad \square\ (ab)^{-1/3}$

ESERCIZIO: L'espressione $b\left(a^6 b^3\right)^{1/2}$ è uguale a

$\square\ \dfrac{1}{a^{12} b^5}$ $\quad \square\ b^2 \sqrt{a}\, a^3$ $\quad \square\ b^2 a^3 \sqrt{b}$ $\quad \square\ b\sqrt{b}\, a^3$

a^x: x reale

Definiamo la potenza a^x per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $a > 0$ "per estensione "da $\mathbb{Q}$

Esempio

Ci possiamo fare un'idea di quanto valga 2^π mediante l'approssimazione decimale $\pi = 3,147\dots$.
Con approssimazione a 1 cifra decimale, $\pi \approx 3,1 = 31/10$, dunque $2^\pi \approx 2^{31/10} = \sqrt[10]{2^{31}}$.
Con 2 cifre decimali, $\pi \approx 3,14 = 314/100$, dunque $2^\pi \approx 2^{314/100} = \sqrt[100]{2^{314}}$.
$\dots\dots$

Quando si maneggiano i numeri reali non é necessario sapere esattamente quanto valgono, bensí piuttosto conoscere le proprietà di cui godono.

Proprietà delle Potenze a esponente reale

Se $a, b > 0$ e $x, y \in \mathbb{R}$ si ha

0. $a^x > 0, \quad a^0 = 1, \quad a^1 = a, \quad 1^x = 1$
1. $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$
2. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ e $a^x : a^y = a^{x-y}$
3. $(a^x)^y = a^{x \cdot y} = (a^y)^x$

Rispetto alle equazioni, si ha

4. $a^x = b^x$ se e soltanto se $a = b$
   $a^x = a^y$ se e soltanto se $x = y$, a patto che $a \neq 1$

Rispetto alle disequazioni, si ha

5. Se $0 < a < b$ allora $\begin{cases} a^x < b^x & \text{per } x > 0 \\ a^x > b^x & \text{per } x < 0 \end{cases}$

   Se $x < y$ allora $\begin{cases} a^x < a^y & \text{per } a > 1 \\ a^x > a^y & \text{per } 0 < a < 1 \end{cases}$

Potenze ed esponenziali

Quando scriviamo

$$A^B$$

abbiamo due attori, la base A e l'esponente B, che giocano ruoli diversi.

Parliamo di funzioni, equazioni e disequazioni di tipo **potenza** quando gli esponenti B sono fissati e ci interessa variare la base A.

Esempio

- $f(x) = x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ o $g(x) = \sqrt{x}$ $(x \geq 0)$ sono leggi di funzioni di tipo potenza
- $x^2 = 3$ o $\sqrt{x^3 - 5} = 1$ sono equazioni di tipo potenza
- $x^2 - 4x + 3 \leq 0$ o $x^{-3} > 8$ sono disequazioni di tipo potenza

Parliamo di funzioni, equazioni e disequazioni di tipo **esponenziale** quando le basi A sono fissate e ci interessa variare gli esponenti B.

Esempio

- $f(x) = 2^x$ $(x \in \mathbb{R})$ o $g(x) = 3^{\frac{x+1}{2}}$ $(x \in \mathbb{R})$ sono leggi di funzioni di tipo esponenziale
- $2^x = 3$ o $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-5} = 3^{4-5x}$ sono equazioni di tipo esponenziale
- $4^{x^2-4x} - 2 \leq 0$ o $3^{x+7} > 9$ sono disequazioni di tipo esponenziale