Prerequisiti di Matematica

Dipartimento di Scienze e Tecnologie

Università Parthenope

a.a. 22/23

Un po' di vocabolario

- Un **predicato** o **proprietà** è una frase che contiene una o più variabili.
  La sua verità dipende dal valore assunto dalle variabili.
- Una **proposizione** è una frase che afferma una proprietà: essa contiene, oltre alle variabili, i cosiddetti **quantificatori**.
  Può essere vera o falsa.

Esempio 1. Il numero naturale n è dispari

è un predicato.

Esempio 2. Esiste un numero naturale dispari

è una proposizione.
È vera in quanto il numero naturale 3 è dispari.

Esempio 3. Ogni numero naturale è dispari

è una proposizione.
È falsa in quanto il numero naturale 2 non è dispari

Esempio 1. Il numero naturale n è dispari
Esempio 2. Esiste un numero naturale dispari
Esempio 3. Ogni numero naturale è dispari

Nelle proposizioni, a differenza dei predicati, sono presenti i quantificatori:

$\forall$ (**ogni** o **qualunque** o **tutti**) quantificatore **universale**

$\exists$ (**esiste** o **almeno uno**) quantificatore **esistenziale**

- Quando si vuole provare che una certa proprietà vale per tutti i numeri reali ($\forall x \in \mathbb{R}$), bisognerà prendere in considerazione un **generico** numero x e vedere se tale proprietà è soddisfatta da x.

  Quando diciamo generico, intendiamo un numero **NON noto**. Per questo motivo lo chiamiamo x, perché potrebbe essere 3, $-\sqrt{2}$ o $\pi/2$ (o qualsiasi altro numero), NON lo sappiamo!

Esempio 4. Tutti i numeri positivi sono maggiori di -1

Quest'affermazione è vera poiché

- per definizione ogni numero x positivo verifica $x > 0$
- è noto che $0 > -1$
- applicando la proprietà transitiva si deduce che $x > 0 > -1$

Quantificatori

- Quando si vuole provare che una certa proprietà vale per tutti i numeri reali ($\forall x \in \mathbb{R}$), bisognerà prendere in considerazione un **generico** numero x e vedere se tale proprietà è soddisfatta da x.
- Se si vuol provare che una certa proprietà **NON** è soddisfatta da **tutti** i numeri reali basterà far vedere che **esiste** un numero che non la soddisfa, cioè basterà trovare un numero particolare (scelto da noi, quindi questa volta conosciuto!) che non ha la proprietà in questione.

Esempio 5. Tutti i numeri reali sono positivi

Quest'affermazione è falsa poiché $\exists\ x = -1$ che è negativo.

Si dice che abbiamo mostrato un **controesempio**

Congiunzioni e disgiunzioni

Nelle proposizioni troviamo congiunzioni o disgiunzioni.
La congiunzione più usata è **e**.
La disgiunzione più frequente è **o**.

- Una proposizione formata da due frasi legate da **e** è vera se e solo se sono vere **entrambe** le frasi.
- Una proposizione in cui sono presenti due frasi legate da un **o** è vera non appena è vera **almeno una** delle due frasi contenute.

Esempio 6.

$2+2=4$ e $3+3=6$ è vera $2+2=4$ o $3+3=6$ è vera
$2+2=4$ e $3+3=5$ è falsa $2+2=4$ o $3+3=5$ è vera

Insieme

è una collezione di oggetti per cui è stata fissata in modo inequivoco una legge di appartenenza.

$x \in A$ si legge "x è un elemento dell'insieme A"
o anche "x appartiene ad A".
$x \notin A$ si legge "x non è un elemento dell'insieme A"
o anche "x non appartiene ad A".

Indichiamo con $\emptyset$ l'insieme privo di elementi.

La legge può essere precisata **elencando** gli elementi:

$$\mathbb{P} = \{2, 4, 6, \dots\},$$

oppure esprimendo una **proprietà**:

$$\mathbb{P} = \{n \in \mathbb{N} \ : \ n \text{ è divisibile per } 2\}.$$

Il linguaggio degli insiemi

Insieme

è una collezione di oggetti per cui è stata fissata in modo inequivoco una legge di appartenenza.

$x \in A$ si legge "x è un elemento dell'insieme A"
o anche "x appartiene ad A".
$x \notin A$ si legge "x non è un elemento dell'insieme A"
o anche "x non appartiene ad A".

Indichiamo con $\emptyset$ l'insieme privo di elementi.

Relazioni fra insiemi

Inclusione: $A \subset B$ se $\forall x \in A,\ x \in B$.

Certamente $\emptyset \subset A$ per qualunque insieme A.

Se $A \subset B$ e $B \subset A$ allora $A = B$

Operazioni fra insiemi

Unione: $A \cup B = \{x : x \in A \textbf{ o } x \in B\}$.

Intersezione: $A \cap B = \{x : x \in A \textbf{ e } x \in B\}$.

Se $A \cap B = \emptyset$ (cioè A e B non hanno alcun elemento in comune), diciamo che A e B sono disgiunti.

In altre parole, date due proprietà $\mathcal{P}(x)$, $\mathcal{Q}(x)$

- L'insieme delle x che verificano la proprietà $\mathcal{P}(x)$ **o** $\mathcal{Q}(x)$ è l'**unione** delle x che verificano $\mathcal{P}(x)$ e di quelle che verificano $\mathcal{Q}(x)$.
- L'insieme delle x che verificano la proprietà $\mathcal{P}(x)$ **e** $\mathcal{Q}(x)$ è l'**intersezione** fra le x che verificano $\mathcal{P}(x)$ e quelle che verificano $\mathcal{Q}(x)$.
  Se questo insieme è vuoto, diciamo che le due proprietà sono mutualmente esclusive, perché non sono mai soddisfatte contemporaneamente.

Operazioni fra insiemi

Unione: $A \cup B = \{x : x \in A \textbf{ o } x \in B\}$.

Intersezione: $A \cap B = \{x : x \in A \textbf{ e } x \in B\}$.

Insieme complementare: $A^C = \{x : x \notin A\}$.

Differenza: $A \setminus B = \{x : x \in A \textbf{ e } x \notin B\} = A \cap B^C$.

Prodotto cartesiano: $A \times B = \{(x, y) : x \in A \textbf{ e } y \in B\}$.

Negazioni

La **negazione** di una proposizione A è la proposizione (**non** A o $\neg A$) che è vera quando A è falsa, e viceversa falsa quando A è vera.

$A : \forall x \ , \mathcal{P}(x)$ vero
"ogni valore di x verifica la proprietà $\mathcal{P}(x)$"
$\neg A : \exists x \ , \mathcal{P}(x)$ falso
"esiste un valore di x per cui non vale la proprietà $\mathcal{P}(x)$"

$B : \exists x \ , \mathcal{P}(x)$ vero
"esiste un valore di x per cui vale la proprietà $\mathcal{P}(x)$"
$\neg B : \forall x \ , \mathcal{P}(x)$ falso
"per ogni valore di x non vale la proprietà $\mathcal{P}(x)$"

Per negare il "per ogni" dobbiamo usare "esiste", mentre per negare "esiste" dobbiamo usare il "per ogni".

Negazioni

La **negazione** di una proposizione A è la proposizione (**non** A o $\neg A$) che è vera quando A è falsa, e viceversa falsa quando A è vera.

Allo stesso modo se in una proposizione è presente un "e" nella negazione otteniamo un "o" e viceversa.

A : "Tutti i sabato vado al cinema e in pizzeria"
$\neg A$: "Esiste un sabato in cui non vado al cinema o in pizzeria"

Esercizio

Indicare qual è la negazione dell'affermazione

"Umberto ha almeno un figlio biondo"

1. Tutti i figli di Umberto sono bruni
2. Almeno un figlio di Umberto non è biondo
3. Nessun figlio di Umberto è biondo
4. Non tutti i figli di Umberto sono biondi
5. Umberto non ha figli

Esercizio

Indicare qual è la negazione dell'affermazione

"Umberto ha almeno un figlio biondo"

1. Tutti i figli di Umberto sono bruni
2. Almeno un figlio di Umberto non è biondo
3. **Nessun figlio di Umberto è biondo**
4. Non tutti i figli di Umberto sono biondi
5. Umberto non ha figli

Esercizio

Indicare qual è la negazione dell'affermazione

"Tutti gli Italiani sono bassi e hanno gli occhi scuri"

1. Alcuni Italiani sono alti e biondi
2. Almeno un Italiano è alto e biondo
3. Tutti gli Italiani con gli occhi scuri sono alti
4. Alcuni Italiani bassi hanno gli occhi chiari
5. C'è almeno un Italiano che è alto, oppure ha gli occhi chiari

Negazioni

Esercizio

Indicare qual è la negazione dell'affermazione

"Tutti gli Italiani sono bassi e hanno gli occhi scuri"

1. Alcuni Italiani sono alti e biondi
2. Almeno un Italiano è alto e biondo
3. Tutti gli Italiani con gli occhi scuri sono alti
4. Alcuni Italiani bassi hanno gli occhi chiari
5. **C'è almeno un Italiano che è alto, oppure ha gli occhi chiari**

- Una **definizione** è una frase che spiega in modo **univoco** il significato di una parola o di un concetto.

Esempio 8.

Un numero razionale è un numero che si può scrivere come $x = p/q$ con p e q interi, $q \neq 0$.

- Un **Teorema** o **enunciato matematico** è formato da almeno due predicati e da una **implicazione logica**.
  Un predicato, detto **ipotesi**, svolge il ruolo di causa.
  L'altro predicato, detto **tesi**, ne è l'effetto.

Esempio 9.

Se due bimbi sono gemelli allora sono fratelli

ipotesi: "essere gemelli" **tesi:** "essere fratelli"
implicazione logica: "allora"

Poniamo, per brevità:

$$A: \text{"essere gemelli"}, \qquad B: \text{"essere fratelli"},$$

$\Longrightarrow$ l'implicazione logica: "allora" o "implica che".

Esempio 9. $A \Longrightarrow B$

La proprietà di essere gemelli implica (causa, ha come conseguenza) essere fratelli,

se l'ipotesi di essere gemelli viene soddisfatta allora la tesi di essere fratelli sarà vera.

"essere gemelli è condizione sufficiente per essere fratelli"

Che possiamo dire delle altre implicazioni?

implicazione diretta: $A \Longrightarrow B$

"essere gemelli è condizione sufficiente per essere fratelli"

implicazione controniversa: non$B \Longrightarrow$ non$A$?

Se due bambini non sono fratelli allora non sono gemelli?

SÍ, se B è falsa, allora anche A è falsa

"essere fratelli è condizione necessaria per essere gemelli

Questo è sempre vero ed è noto come "legge della controinversa (o contronominale)".

implicazione diretta: $A \Longrightarrow B$

"essere gemelli è condizione sufficiente per essere fratelli"

implicazione controniversa: $\text{non}B \Longrightarrow \text{non}A$

"essere fratelli è condizione necessaria per essere gemelli

implicazione inversa: $B \Longrightarrow A$?

Se due bimbi sono fratelli allora sono gemelli?

NO, è possibile che A sia falsa anche se B è vera

"essere fratelli non è condizione sufficiente per essere gemelli"

implicazione diretta: $A \Longrightarrow B$

"essere gemelli è condizione sufficiente per essere fratelli"

implicazione controniversa: $\text{non}B \Longrightarrow \text{non}A$

"essere fratelli è condizione necessaria per essere gemelli

implicazione inversa: $B \Longrightarrow A$ NO

"essere fratelli non è condizione sufficiente per essere gemelli"

implicazione contraria: non $A \Longrightarrow$ non B?

Se due bambini non sono gemelli allora non sono fratelli?

NO, è possibile che B sia vera anche se A è falsa

"essere gemelli non è condizione necessaria per essere fratelli"

implicazione diretta: $A \Longrightarrow B$

"essere gemelli è condizione sufficiente per essere fratelli"

implicazione controniversa: $\text{non}B \Longrightarrow \text{non}A$

"essere fratelli è condizione necessaria per essere gemelli

implicazione inversa: $B \Longrightarrow A$ NO

"essere fratelli non è condizione sufficiente per essere gemelli"

implicazione contraria: $\text{non}A \Longrightarrow \text{non}B$ NO

"essere gemelli non è condizione necessaria per essere fratelli"

Nell'esempio A è condizione necessaria ma non sufficiente per B

Quando tutte e quattro le implicazioni sono vere diciamo che

coimplicazione: $A \Longleftrightarrow B$

"A è condizione necessaria e sufficiente per B"

A è vera se e solo se B è vera, cioè A e B sono equivalenti

Esempio 10: condizione sufficiente

Se $x = 2$ allora $x^2 = 4$.

Nell'ipotesi vengono affermate le condizioni sufficienti a garantire che la tesi si avveri: è sufficiente che un numero x sia uguale a due affinché il suo quadrato sia uguale a quattro.

NON viene affermato che x^2 è uguale a quattro SOLTANTO se x è uguale a due (infatti $x^2 = 4$ anche quando $x = -2$)

Essere condizione sufficiente è DIVERSO dall'essere condizione necessaria.

Esempio 11: condizione sufficiente e necessaria

$|x| = 2$ se e solo se $x^2 = 4$.

In questo caso, avere valore assoluto due (cioè essere uguale a più o meno due) è una condizione sufficiente e necessaria per un numero x affinché il suo quadrato sia uguale a quattro.
Cioè

- $|x| = 2 \Longrightarrow x = \pm 2 \Longrightarrow x^2 = 4$

  E, VICEVERSA,
- $x^2 = 4 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \Longrightarrow |x| = |\pm 2| = 2$

Per dimostrare che vale una condizione sufficiente e necessaria bisogna verificare sia l'implicazione diretta che l'implicazione inversa.

Tecniche di dimostrazione

dimostrazione diretta

Partendo dal fatto che l'ipotesi è vera e usando altri teoremi dimostrati in precedenza (proprietà note) si deduce logicamente che la tesi è anch'essa vera

Esempio 12.

Dimostriamo che "Tutti i numeri positivi sono maggiori di -1"

Per prima cosa, dobbiamo chiarirci cosa possiamo dare per certo (l'ipotesi) e cosa vogliamo dimostrare (la tesi).

$$\text{ipotesi: } x \in \mathbb{R},\ x > 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{tesi: } x > -1$$

Dimostrazione: So che $0 > -1$ (per definizione di "$>$", poiché $0 - (-1) = 1 > 0$), dunque

$$\underset{\text{ipotesi}}{x > 0} \quad e \quad \underset{\text{verificato}}{0 > 1} \quad \underset{\substack{\text{proprietà}\\ \text{transitiva}}}{\Longrightarrow} \quad \underset{\text{tesi}}{x > -1}$$

dimostrazione contronominale o controinversa

Si suppone che la tesi sia falsa, e si mostra attraverso passaggi logici che ANCHE l'ipotesi è falsa.

Per provare "$A \Longrightarrow B$", dimostriamo che "non $B \Longrightarrow$ non A"

Esempio 13.

Dimostriamo "I numeri dispari non sono divisibili per 4"

Nell'enunciato diretto:
ipotesi: $n \in \mathbb{N}$ e $\exists k \in \mathbb{N}$ tale che $n = 2k + 1 \quad \Longrightarrow$
tesi: $\nexists h \in \mathbb{N}$ tale che $n = 4h$

Enunciato controinverso: "I numeri divisibili per 4 sono pari"
ipotesi: $n \in \mathbb{N}$ e $\exists h \in \mathbb{N}$ tale che $n = 4h \quad \Longrightarrow$
tesi: $\exists k \in \mathbb{N}$ tale che $n = 2k$

Dimostrazione: Sappiamo che $4 = 2 \cdot 2$, dunque

$$n \underset{\text{ipotesi}}{=} 4 \cdot h \underset{\text{noto}}{=} (2 \cdot 2) \cdot h \underset{\substack{\text{proprietà}\\ \text{associativa}}}{=} 2 \cdot (2 \cdot h) \underset{\substack{2 \cdot h = k\\ \text{è intero}}}{=} \underset{\text{tesi}}{2 \cdot k}$$

dimostrazione per assurdo

Si suppone che l'ipotesi sia vera ma la tesi falsa, e si arriva ad una contraddizione (ad esempio che l'ipotesi è falsa)

Per provare "$A \Longrightarrow B$", dimostriamo che "A e non $B \Longrightarrow$ non A"

Esempio 13.

Dimostriamo che "Non esiste un numero razionale il cui quadrato è 2"

Nell'enunciato diretto:
ipotesi: $x \in \mathbb{Q} \quad \Longrightarrow \quad$ tesi: $x^2 \neq 2$

Enunciato per assurdo: "Se un numero razionale ha come quadrato 2, allora non è razionale"
ipotesi (per ass.): $x \in \mathbb{Q}$ e $x^2 = 2 \quad \Longrightarrow \quad$ tesi: $x \notin \mathbb{Q}$

Come nel caso precedente (numeri pari e dispari) è necessario avere una idea chiara di cosa sia un numero razionale!!!

Ricordo che per definizione ogni numero razionale si può scrivere come rapporto $x = \frac{p}{q}$ (dove p e q sono numeri interi) e, dopo aver semplificato, p e q sono primi fra loro (cioè non hanno divisori comuni) ipotesi (per ass.): $\exists p, q \in \mathbb{Z}$, primi fra loro, tali che $x = \dfrac{p}{q}$ e $x^2 = 2$

$\implies$ tesi: $\nexists p, q \in \mathbb{Z}$, primi fra loro, tali che $x = \dfrac{p}{q}$

Dimostrazione: So che

$$2 = x^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2}$$

e moltiplicando per q^2 il primo e l'ultimo membro si ha

$$2q^2 = p^2 \implies p \text{ è pari}$$

cioè $\exists k \in \mathbb{Z} \ : \ p = 2k$. Sostituiamo nell'uguaglianza precedente:

$$2q^2 = (2k)^2 = 4k^2$$

e dividendo per 2 il primo e l'ultimo membro si ha

$$q^2 = 2k^2 \implies \text{ è } q \text{ è pari}$$

ipotesi (per ass.): $\exists p, q \in \mathbb{Z}$, primi fra loro, tali che $x = \frac{p}{q}$ e $x^2 = 2$

$\Longrightarrow$ tesi: $\nexists p, q \in \mathbb{Z}$, **primi fra loro**, tali che $x = \frac{p}{q}$

Dimostrazione: So che

$$2 = x^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2}$$

e moltiplicando per q^2 il primo e l'ultimo membro si ha

$$2q^2 = p^2 \Longrightarrow p \text{ \textbf{è pari}}$$

cioè $\exists k \in \mathbb{Z} \, : \, p = 2k$. Sostituiamo nell'uguaglianza precedente:

$$2q^2 = (2k)^2 = 4k^2$$

e dividendo per 2 il primo e l'ultimo membro si ha

$$q^2 = 2k^2 \Longrightarrow \text{ è } q \text{ \textbf{è pari}}$$

Esercizio

Un accogliente cartello all'ingresso del ristorante L'Oca Giuliva recita:

Se si è in pochi, si mangia bene

Se si è in tanti, si spende poco

Il Signor Aquilotto, con la sua mente acuta, ne deduce logicamente che:

1. se si è pochi, si spende tanto
2. per mangiar bene è necessario andarci in pochi
3. se si mangia male non si è in pochi
4. per spendere poco bisogna essere in tanti
5. se si è in tanti, si mangia male.

Esercizio

Un accogliente cartello all'ingresso del ristorante L'Oca Giuliva recita:

Se si è in pochi, si mangia bene

Se si è in tanti, si spende poco

Il Signor Aquilotto, con la sua mente acuta, ne deduce logicamente che:

1. se si è pochi, si spende tanto
2. per mangiar bene è necessario andarci in pochi
3. **se si mangia male non si è in pochi**
4. per spendere poco bisogna essere in tanti
5. se si è in tanti, si mangia male.

Esercizio

Un chimico, studiando una soluzione che si era tinta di arancione, constatò che in essa era presente del sodio o del potassio (o entrambi); inoltre osservò che, se NON c'era sodio, c'era ferro, e che, se c'era potassio, c'era anche iodio. Quale di queste situazione si può verificare?

1. La soluzione contiene solo potassio e ferro
2. La soluzione contiene solo ferro e iodio
3. La soluzione contiene sodio e potassio, e non contiene iodio
4. La soluzione non contiene né sodio né iodio
5. La soluzione contiene solo sodio

Esercizio

Un chimico, studiando una soluzione che si era tinta di arancione, constatò che in essa era presente del sodio o del potassio (o entrambi); inoltre osservò che, se NON c'era sodio, c'era ferro, e che, se c'era potassio, c'era anche iodio. Quale di queste situazione si può verificare?

1. La soluzione contiene solo potassio e ferro
2. La soluzione contiene solo ferro e iodio
3. La soluzione contiene sodio e potassio, e non contiene iodio
4. La soluzione non contiene né sodio né iodio
5. **La soluzione contiene solo sodio**

Esercizio

Premesso che:

- chi ascolta musica rock o blues non è stonato
- Agenore non è stonato
- chi ascolta blues non vince al Lotto

quale tra le seguenti conclusioni NON si può trarre dalle precedenti premesse?

1. Uno stonato non ascolta rock
2. È possibile che Agenore non vinca al Lotto
3. Chi vince al Lotto non ascolta blues
4. Certamente Agenore ascolta blues o rock
5. Non è escluso che Agenore ascolti rock

Esercizio

Premesso che:

- chi ascolta musica rock o blues non è stonato
- Agenore non è stonato
- chi ascolta blues non vince al Lotto

quale tra le seguenti conclusioni NON si può trarre dalle precedenti premesse?

1. Uno stonato non ascolta rock
2. È possibile che Agenore non vinca al Lotto
3. Chi vince al Lotto non ascolta blues
4. **Certamente Agenore ascolta blues o rock**
5. Non è escluso che Agenore ascolti rock

Esercizio

Nel corso delle indagini su un assassinio, sono stati appurato questi due fatti:

- se X ha sparato alla vittima, allora X è mancino;
- se Y ha sparato alla vittima, allora Y è l'assassino.

Quale di queste deduzioni è corretta?

1. L'assassino ha sparato alla vittima
2. Poiché il signor Bianchi non è mancino, è innocente
3. Poiché il signor Rossi è mancino, è l'assassino
4. Poiché il signor Rossi è mancino, ha sparato alla vittima
5. Poiché il signor Bianchi non è mancino, non ha sparato alla vittima

Esercizio

Nel corso delle indagini su un assassinio, sono stati appurato questi due fatti:

- se X ha sparato alla vittima, allora X è mancino;
- se Y ha sparato alla vittima, allora Y è l'assassino.

Quale di queste deduzioni è corretta?

1. L'assassino ha sparato alla vittima
2. Poiché il signor Bianchi non è mancino, è innocente
3. Poiché il signor Rossi è mancino, è l'assassino
4. Poiché il signor Rossi è mancino, ha sparato alla vittima
5. **Poiché il signor Bianchi non è mancino, non ha sparato alla vittima**

Esercizio

In occasione delle elezioni primarie per la scelta del candidato premier, ciascuno dei sette candidati è sicuro di riuscire a classificarsi fra i tre più votati. Negare questa frase vuol dire affermare che:

1. almeno un candidato teme di rientrare fra i tre meno votati
2. almeno un candidato non è sicuro di rientrare fra i primi tre più votati
3. alcuni candidati sono certi di classificarsi fra i tre più votati
4. ogni candidato è sicuro di non classificarsi fra i tre più votati
5. ciascuno dei candidati teme di rientrare fra i tre meno votati

Esercizio

In occasione delle elezioni primarie per la scelta del candidato premier, ciascuno dei sette candidati è sicuro di riuscire a classificarsi fra i tre più votati. Negare questa frase vuol dire affermare che:

1. almeno un candidato teme di rientrare fra i tre meno votati
2. **almeno un candidato non è sicuro di rientrare fra i primi tre più votati**
3. alcuni candidati sono certi di classificarsi fra i tre più votati
4. ogni candidato è sicuro di non classificarsi fra i tre più votati
5. ciascuno dei candidati teme di rientrare fra i tre meno votati

Esercizio

Il ministro dell'economia afferma: *Se il bilancio non sarà tagliato, allora i prezzi rimarranno stabili se e soltanto se aumenteremo tutte le tasse.* Sapendo che il bilancio non fu tagliato, che cosa può essere accaduto a Matlandia?

1. Tutte le tasse furono aumentate e i prezzi crebbero
2. Le tasse non furono aumentate e i prezzi rimasero stabili perché era stato tagliato il bilancio
3. Alcune tasse non furono aumentate e tutti i prezzi rimasero stabili
4. Alcune tasse non furono aumentate e i prezzi crebbero
5. Nessuna tassa fu aumentata e tutti prezzi rimasero stabili

Esercizio

Il ministro dell'economia afferma: *Se il bilancio non sarà tagliato, allora i prezzi rimarranno stabili se e soltanto se aumenteremo tutte le tasse.* Sapendo che il bilancio non fu tagliato, che cosa può essere accaduto a Matlandia?

1. Tutte le tasse furono aumentate e i prezzi crebbero
2. Le tasse non furono aumentate e i prezzi rimasero stabili perché era stato tagliato il bilancio
3. Alcune tasse non furono aumentate e tutti i prezzi rimasero stabili
4. **Alcune tasse non furono aumentate e i prezzi crebbero**
5. Nessuna tassa fu aumentata e tutti prezzi rimasero stabili