



SIS Scuola Interdipartimentale
delle Scienze, dell'Ingegneria
e della Salute



Laurea Magistrale in STN

Applicazioni di Calcolo Scientifico e Laboratorio di ACS (12 cfu)

prof. Mariarosaria Rizzardi

Centro Direzionale di Napoli – Isola C4

stanza: n. 423 – Lato Nord, 4° piano

tel.: 081 547 6545

email: mariarosaria.rizzardi@uniparthenope.it



Argomenti trattati

➤ **Calcolo Simbolico in MATLAB.**

Calcolo Simbolico in MATLAB

Per eseguire calcoli simbolici con MATLAB è necessario aver installato il **Symbolic Math Toolbox**, che aggiunge un nuovo tipo di dati: l'**oggetto simbolico**. Un oggetto simbolico va necessariamente dichiarato mediante:

```
syms a  
a  
a =  
a
```

oppure

```
a=sym('a')  
a =  
a
```

Esempi

```
a=sym(2), b=2  
a = 2 simbolico  
2  
b = 2 numerico  
2
```

```
a=sym(pi)  
a =  $\pi$  simbolico  
pi  
b=pi  
b =  $\pi$  numerico  
3.1416
```

```
syms a  
assumptions  
ans =  
Empty sym: 1-by-0
```

```
syms a real  
assumptions  
ans =  
in(a, 'real')
```

```
syms a positive  
assumptions  
ans =  
 $0 < a$ 
```

```
v=sym('v',[1 3])  
v = vettore simbolico  
[v1, v2, v3]
```

```
syms a integer  
assumptions  
ans =  
in(a, 'integer')
```

```
syms a integer positive  
assumptions  
ans =  
[in(a, 'integer'), 1 <= a]
```

```
syms f(x,y)  
f funzione simbolica  
f(x,y) =  
f(x,y)
```

```
A=sym('a',[2 3])  
A = matrice simbolica  
[a1_1, a1_2, a1_3]  
[a2_1, a2_2, a2_3]
```

```
a=sym('a',{'positive','integer'});  
assumptions  
ans =  
[in(a, 'integer'), 1 <= a]
```

Esempi

oggetto numerico

```
a=sqrt(2)
```

```
a =  
    1.4142
```

```
2/5+1/3
```

```
ans =  
    0.7333
```

```
a=1;b=-2;c=4;x=1;
```

```
p=a*x^2+b*x+c;
```

```
disp(p)
```

```
3
```

converte l'espressione simbolica in *Anonymous Function*

```
P=matlabFunction(p)
```

```
P =  
function_handle with value:  
@(a,b,c,x)c+b.*x+a.*x.^2
```

oggetto simbolico

```
a=sqrt(sym(2))
```

```
a =
```

```
2^(1/2)
```

```
double(a) converte il valore simbolico in numerico
```

```
ans =
```

```
1.4142
```

```
sym(2)/5+1/sym(3)
```

```
ans =
```

```
11/15
```

variabili

numeriche

simboliche

```
syms a b c x
```

```
p=a*x^2+b*x+c;
```

```
pretty(p)
```

```
2
```

```
a x + b x + c
```

Un oggetto simbolico è sempre una "formula"!

```
a=sqrt(sym(2))
```

```
a =  
2^(1/2)
```

```
a=sym('a')
```

```
a =  
a
```

```
syms f(x), f
```

```
f(x) =  
f(x)
```

```
syms x h real
```

```
Df=(subs(f,x,x+h) - f) / h
```

```
Df = ← substitute: sostituisci in f, ad x, x+h  
(f(x+h)-f(x))/h rapporto incrementale
```

costante simbolica

variabile simbolica

funzione simbolica

```
p=sym(pi)
```

```
p =  
pi
```

```
syms r
```

```
d=2*p*r
```

```
d =  
2*pi*r
```

```
cos(d)
```

```
ans =  
cos(2*pi*r)
```

```
subs(cos(d),r,2)
```

```
ans =  
1
```

```
a = sym('b')
```

```
a =  
b
```

```
syms b; b
```

```
b =  
b
```

```
a=sqrt(sym(2)); double(a)
```

```
ans =  
1.4142
```

```
p=sym(pi); double(p)
```

```
ans =  
3.1416
```

double: per convertire
un numero da simbolico
a numerico

Semplificazione di un'espressione simbolica

```
syms x a b c
f=cos(x)^2-sin(x)^2;
simplify(f)
ans =
cos(2*x)
f=exp(c*log(sqrt(a+b)));
simplify(f)
ans =
(a + b)^(c/2)
```

simplify_expressions.mlx x +

Semplificare le espressioni simboliche

(live script: simplify_expressions.mlx)

```
1 e1=((exp(-x*1i)*1i) - (exp(x*1i)*1i));
2 e2=(exp(-x*1i) + exp(x*1i));
3 espr=e1/e2;
4 s1=simplify(e1), s2=simplify(e2)
```

$$s_1 = 2 \sin(x)$$

$$s_2 = 2 \cos(x)$$

Download *live script*:

[simplify_expressions.mlx](#)

```
5 S=simplify(espr)
```

$$S =$$
$$-\frac{e^{2xi}i - i}{e^{2xi} + 1}$$

Aumenta i passi di semplificazione a 10

```
6 S10=simplify(espr, 'Steps', 10)
```

$$S_{10} =$$
$$\frac{2i}{e^{2xi} + 1} - i$$

Aumenta i passi di semplificazione a 30

```
7 S30=simplify(espr, 'Steps', 30)
```

$$S_{30} =$$
$$\frac{(\cos(x) - \sin(x)i)i - i}{\cos(x)}$$

Aumenta i passi di semplificazione a 50

```
9 S50=simplify(espr, 'Steps', 50)
```

$$S_{50} = \tan(x)$$

Laurea Magistrale in Scienze e Applicazioni di Calcolo Simbolico
Prof. Maria

Semplificazione di un'espressione simbolica

Aumenta i passi di semplificazione a 30

```
S30=simplify(espr,'Steps',30)
```

$$S_{30} = \frac{(\cos(x) - \sin(x) i) i - i}{\cos(x)}$$

Aumenta i passi di semplificazione a 50

```
S50=simplify(espr,'Steps',50)
```

$$S_{50} = \tan(x)$$

```
S=simplify(espr,'Steps',50,'All',true)
```

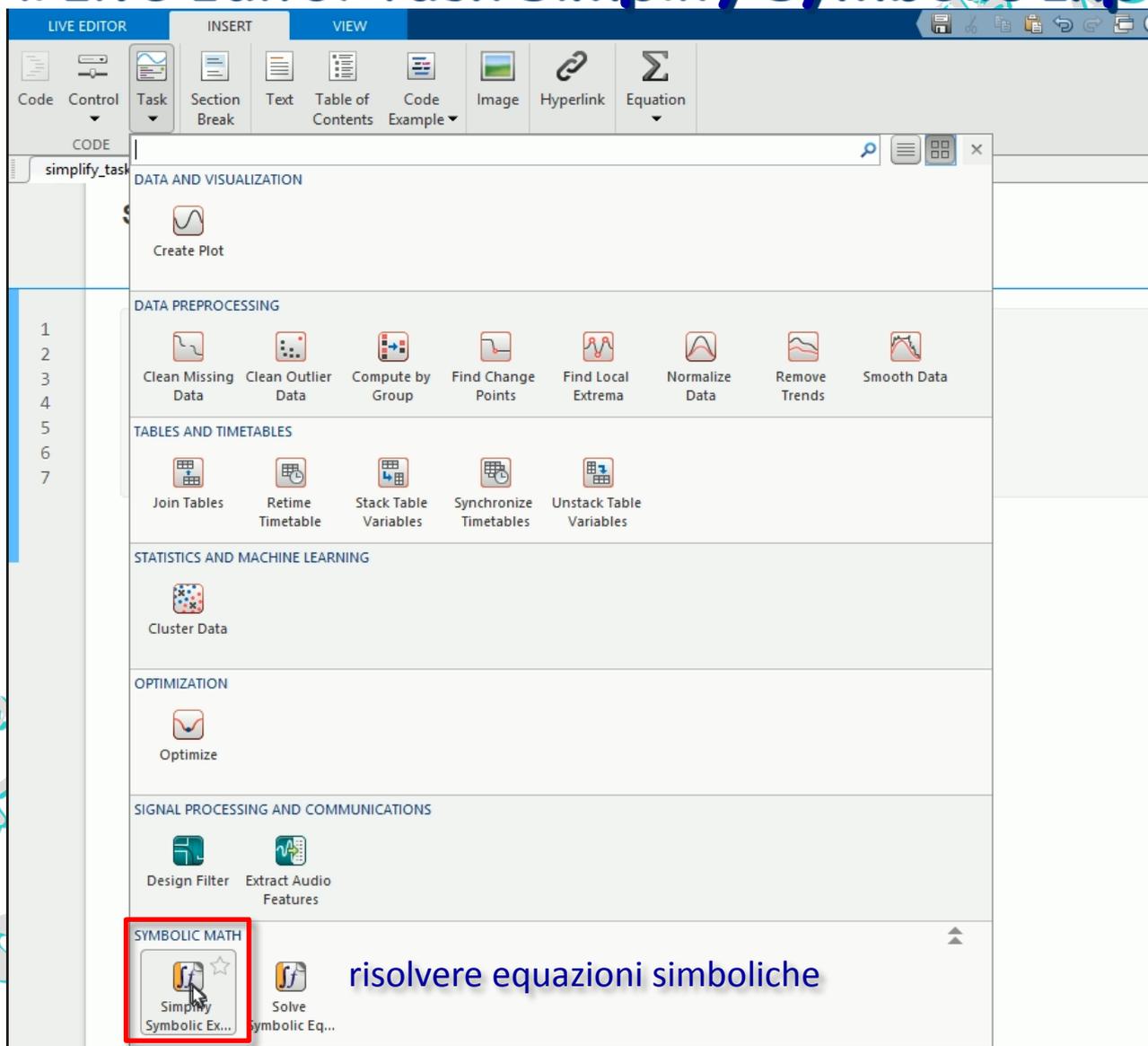
$$S = \left(\begin{array}{l} \tan(x) \\ \frac{1}{\cot(x)} \\ \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\ \frac{(\cos(x) - \sin(x) i) i - i}{\cos(x)} \\ \frac{\sigma_2}{\cos(x)} - i \\ \frac{2i}{\sigma_1} - i \\ \frac{(2\sigma_3 + \sin(x) i - 1) i - i}{2\sigma_3 - 1} \\ -\frac{\sigma_4 - i}{\sigma_1} \\ -\frac{e^{-xi} (e^{xi} \cos(x) i - i)}{\cos(x)} \\ -\frac{\sigma_4}{\sigma_1} + \frac{i}{\sigma_1} \\ -\frac{\sin(x)}{2\sigma_3 - 1} - \frac{i}{2\sigma_3 - 1} + \frac{2\sigma_3 i}{2\sigma_3 - 1} - i \\ \frac{\sigma_2}{e^{-xi} + e^{xi}} - i \end{array} \right)$$

- Compute Jacobian matrix of vector
- Applying calculus functions
- Computing integral transforms
- Converting numbers
- Rewriting and simplifying expressions
- Solving equations
- Copy Ctrl+C
- Copy as LaTeX
- Copy as MathML
- Copy Output
- Copy All Output
- Clear Output
- Clear All Output

per vedere tutte le possibili
semplificazioni

Download live script:
[simplify_expressions.mlx](#)

Semplificazione di un'espressione simbolica usando il Live Editor task Simplify Symbolic Expression

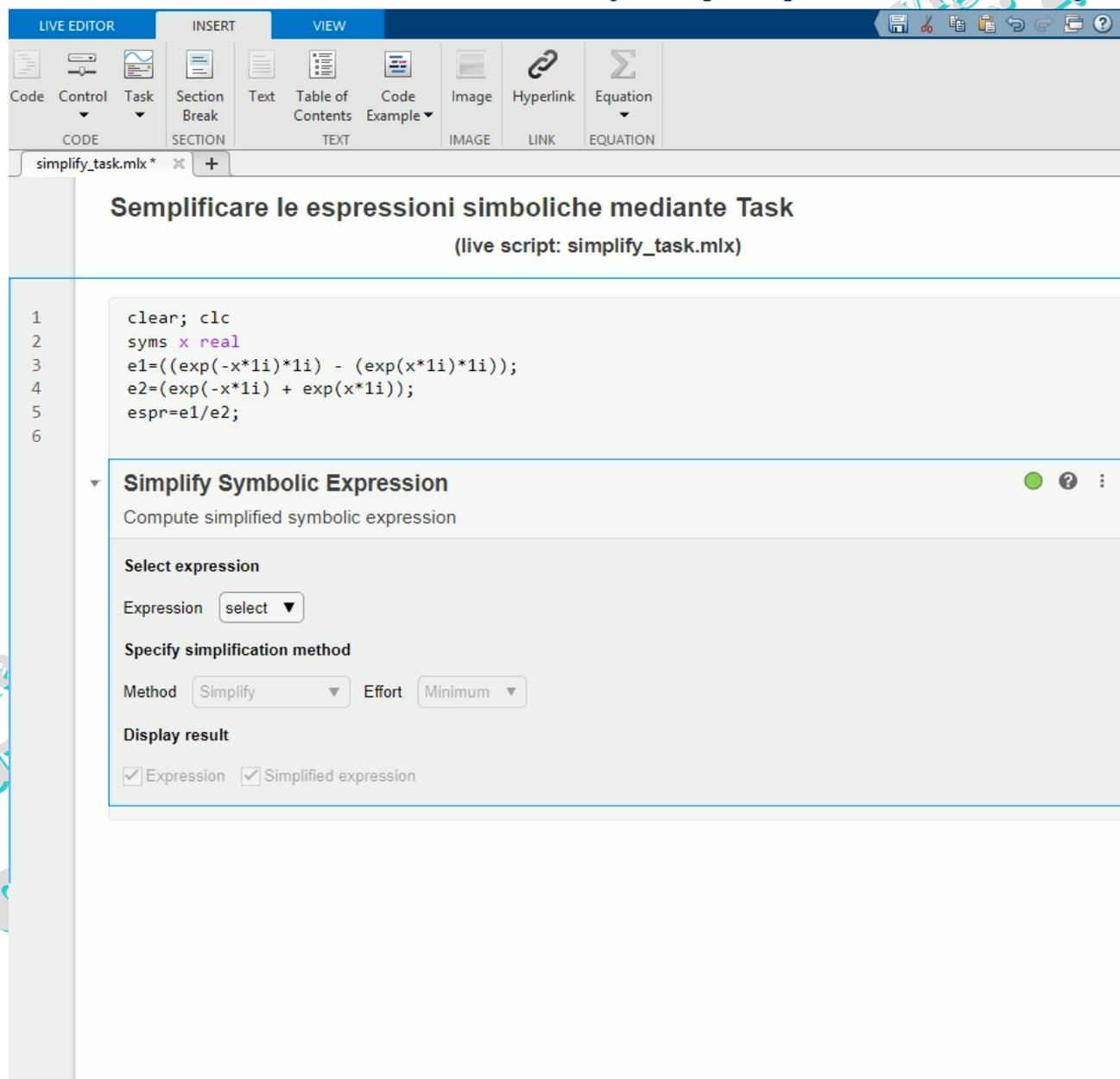


semplificare un'espressione
simbolica

Download live script:
[simplify_task.mlx](#)

Laurea Mag
Applicat
Pro

Semplificazione di un'espressione simbolica usando il Live Editor task Simplify Symbolic Expression



The screenshot displays the MATLAB Live Editor interface. At the top, there is a ribbon with tabs for 'LIVE EDITOR', 'INSERT', and 'VIEW'. Below the ribbon is a toolbar with icons for various actions like saving, undo, redo, and zooming. The main workspace shows a script titled 'simplify_task.mlx' with the following code:

```
1 clear; clc
2 syms x real
3 e1=((exp(-x*1i)*1i) - (exp(x*1i)*1i));
4 e2=(exp(-x*1i) + exp(x*1i));
5 espr=e1/e2;
6
```

Below the code editor, a task panel titled 'Simplify Symbolic Expression' is open. The task description is 'Compute simplified symbolic expression'. The panel includes a 'Select expression' section with a dropdown menu set to 'select'. The 'Specify simplification method' section has a 'Method' dropdown set to 'Simplify' and an 'Effort' dropdown set to 'Minimum'. The 'Display result' section has two checked checkboxes: 'Expression' and 'Simplified expression'.

Download live script:
[simplify_task.mlx](#)

Laurea Magistrale
Applicazioni
DIP

Semplificazione di un'espressione simbolica usando il Live Editor task Simplify Symbolic Expression

Semplificare le espressioni simboliche mediante Task
(live script: simplify_task.mlx)

```
1 clear; clc
2 syms x real
3 e1=((exp(-x*1i)*1i) - (exp(x*1i)*1i));
4 e2=(exp(-x*1i) + exp(x*1i));
5 espr=e1/e2;
6
```

1 scegli l'espressione da semplificare

2 scegli il livello di semplificazione

3 guarda il risultato

mostra il codice

Download live script:
[simplify_task.mlx](#)

Risoluzione di equazioni e sistemi

```
syms a b c x real
eqn=a*x^2+b*x+c == 0
S=solve(eqn)
```

Warning: Solutions are only valid under certain conditions. To include parameters and conditions in the solution, specify the 'ReturnConditions' value as 'true'.

```
> In sym/solve>warnIfParams (line 478)
```

```
In sym/solve (line 357)
```

```
S =
-(b + (b^2 - 4*a*c)^(1/2))/(2*a)
-(b - (b^2 - 4*a*c)^(1/2))/(2*a)
S=solve(eqn, 'ReturnConditions', true)
```

```
S =
struct with fields:
    x: [2x1 sym]
    parameters: [1x0 sym]
    conditions: [2x1 sym]
```

```
S.x
ans =
-(b + (b^2 - 4*a*c)^(1/2))/(2*a)
-(b - (b^2 - 4*a*c)^(1/2))/(2*a)
```

```
S.conditions
ans =
4*a*c <= b^2 & a ~= 0
4*a*c <= b^2 & a ~= 0
```

```
A=solve(eqn,a)
A =
-(c + b*x)/x^2
```

singola equazione

```
syms x
eqn=x^3 == -1
S=solve(eqn,x)
S =
-1
1/2 - (3^(1/2)*1i)/2
(3^(1/2)*1i)/2 + 1/2
```

```
syms x real
eqn=x^3 == -1
S=solve(eqn,x)
S =
-1
```

```
syms x
eqn=x^3 == -1
S=solve(eqn,x, 'Real', true)
S =
-1
```

sistema lineare

```
syms u v
eqns=[2*u + v == 0, u - v == 1];
S=solve(eqns,[u v])
S =
struct with fields:
    u: 1/3
    v: -2/3
```

sistema non lineare

```
syms u v
eqns=[2*u^2 + v^2 == 0, u - v == 1];
[U,V]=solve(eqns,[u v])
U =
1/3 - (2^(1/2)*1i)/3
(2^(1/2)*1i)/3 + 1/3
V =
- (2^(1/2)*1i)/3 - 2/3
(2^(1/2)*1i)/3 - 2/3
```

"Calculus" simbolico: esempi [1]

limiti

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}$$

```
syms x real; limit(1/x,x,inf)
```

```
ans =  
0
```

```
limit(1/x,x,0)
```

```
ans =  
NaN
```

```
limit(1/x,x,0,'left')
```

```
ans =  
-Inf
```

```
limit(1/x,x,0,'right')
```

```
ans =  
Inf
```

```
syms x real positive
```

```
limit(-x/abs(-x),x,0)
```

```
ans =  
-1
```

```
syms x real positive
```

```
limit(1/x,x,0)
```

```
ans =  
Inf
```

NaN sta per Not a Number

```
syms x h real
```

```
limit((cos(x+h)-cos(x))/h,h,0)
```

```
ans =  
-sin(x)  
limite del rapporto incrementale di cos(x)
```

somma di serie

```
syms x n
```

```
an=x^n/sym('n!');
```

```
symsum(an,n,0,inf)
```

```
ans =  
exp(x)
```

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

sviluppo di Taylor

```
syms x
```

```
T=taylor(exp(x))
```

```
T =
```

```
x^5/120 + x^4/24 + x^3/6 + x^2/2 + x + 1
```

vedi *Live Script*:

Find Maclaurin Series of Univariate Expressions

"Calculus" simbolico: esempi [2]

derivate

derivate ordinarie

```
syms x real
f=sin(x)
f =
sin(x)
diff(f)
ans =
cos(x)
diff(f,2)
ans =
-sin(x)
diff(f,3)
ans =
-cos(x)
```

derivata 2^a

derivata 3^a

derivate parziali

```
syms x y real
f=sin(x)*exp(i*y)
f =
sin(x)*exp(i*y)
diff(f,x) derivata parziale rispetto a x
ans =
exp(y*1i)*cos(x)
diff(f,y) derivata parziale rispetto a y
ans =
exp(y*1i)*sin(x)*1i
diff(f,y,2) derivata parziale 2a
ans =
-diff(f,y) rispetto a y
-exp(y*1i)*sin(x)
```

gradiente

$$\nabla_{x,y}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

```
syms x y real
f=sin(x)*exp(i*y);
gradient(f)
ans =
exp(y*1i)*cos(x)
exp(y*1i)*sin(x)*1i
```

matrice jacobiana

$$J_{x,y}(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

```
syms x y real
u=x*cos(y); v=y*cos(x);
jacobian([u;v],[x y])
ans =
[ cos(y), -x*sin(y)]
[ -y*sin(x), cos(x)]
```

"Calculus" simbolico: esempi [3]

integrali

```
syms x real
syms n integer positive
int(x^n)
ans =
x^(n+1)/(n+1)
int(cos(x))
ans =
sin(x)
```

```
syms x n real
int(sin(n*x),x)
ans =
-cos(n*x)/n
int(sin(n*x),n)
ans =
-cos(n*x)/x
```

indefiniti

definiti

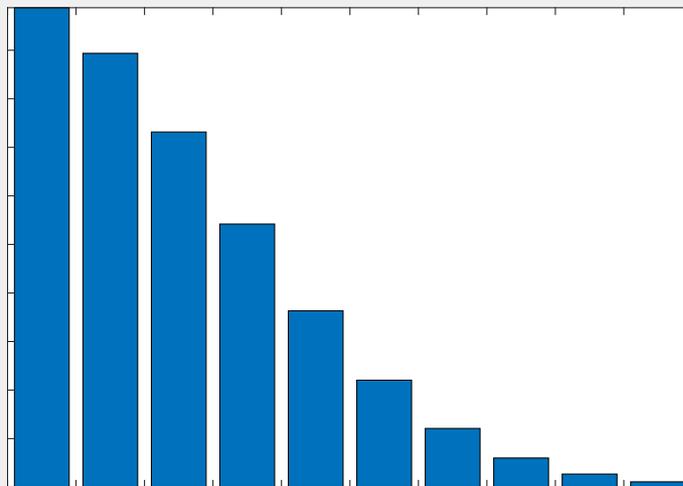
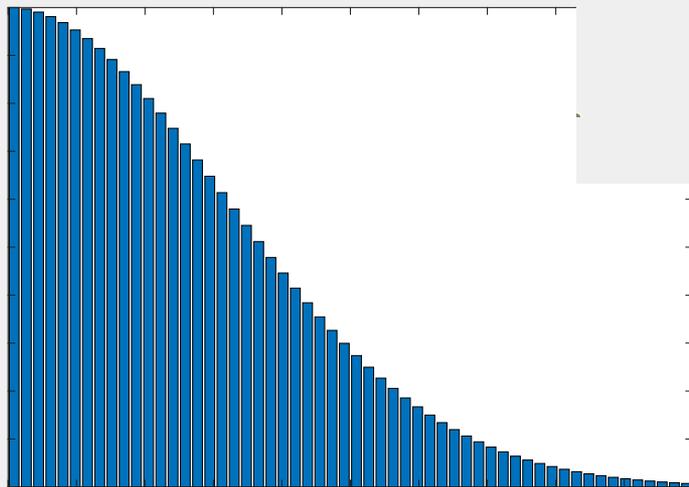
```
syms x n real
int(sin(n*x),x,0,pi/n)
ans =
2/n
```

$$\int_0^{\pi/n} -\cos(nx)/n \Big|_0^{\pi/n} = -\cos(\pi)/n + \cos(0)/n = 2/n$$

Integrali: strumento interattivo Somme di Riemann

```
syms x real
```

```
rsums('exp(-5*x^2)')
```



"Calculus" simbolico: esempi [4]

studio della funzione

$$f(x) = \frac{3x^2 + 6x - 1}{x^2 + x - 3}$$

```
syms x real; num=3*x^2+6*x-1; den=x^2+x-3; f=num/den;
```

```
pretty(f)
```

$$\frac{3x^2 + 6x - 1}{x^2 + x - 3}$$

```
h=ezplot(f,[-8 6]); % oppure fplot(f,...)
```

```
h.LineWidth=3; % oppure set(h,'LineWidth',2)
```

```
axis equal; grid on; AX=[-7 7 -3 9]; axis(AX)
```

```
hold on
```

assi cartesiani come frecce

```
quiver(AX(1),0,1,0,diff(AX(1:2)),'Color','k')
```

```
quiver(0,AX(3),0,1,diff(AX(3:4)),'Color','k')
```

```
text(AX(2),0,'x ','FontSize',14,'HorizontalAlignment','right')
```

```
text(0,AX(4),'y ','FontSize',14,'HorizontalAlignment','right')
```

```
asint_0=[limit(f,-inf) limit(f,inf)]
```

```
asint_0 =
```

```
[ 3, 3] asintoto orizzontale
```

```
asint_V=solve(den,x) % oppure solve(1/f,x)
```

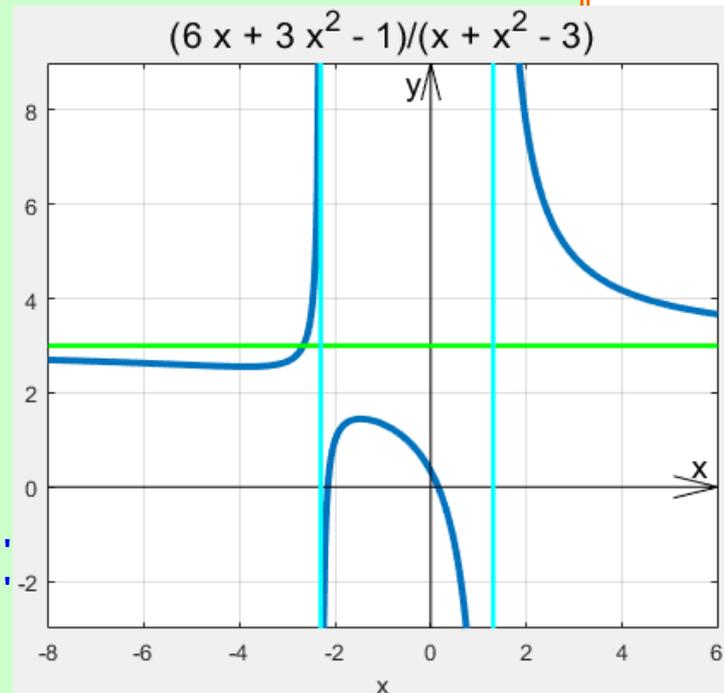
```
asint_V =
```

```
- 13^(1/2)/2 - 1/2
```

```
13^(1/2)/2 - 1/2 asintoti verticali
```

```
line(AX(1)*[-1 1],(asint_0(1))*[1 1],'Color','g')
```

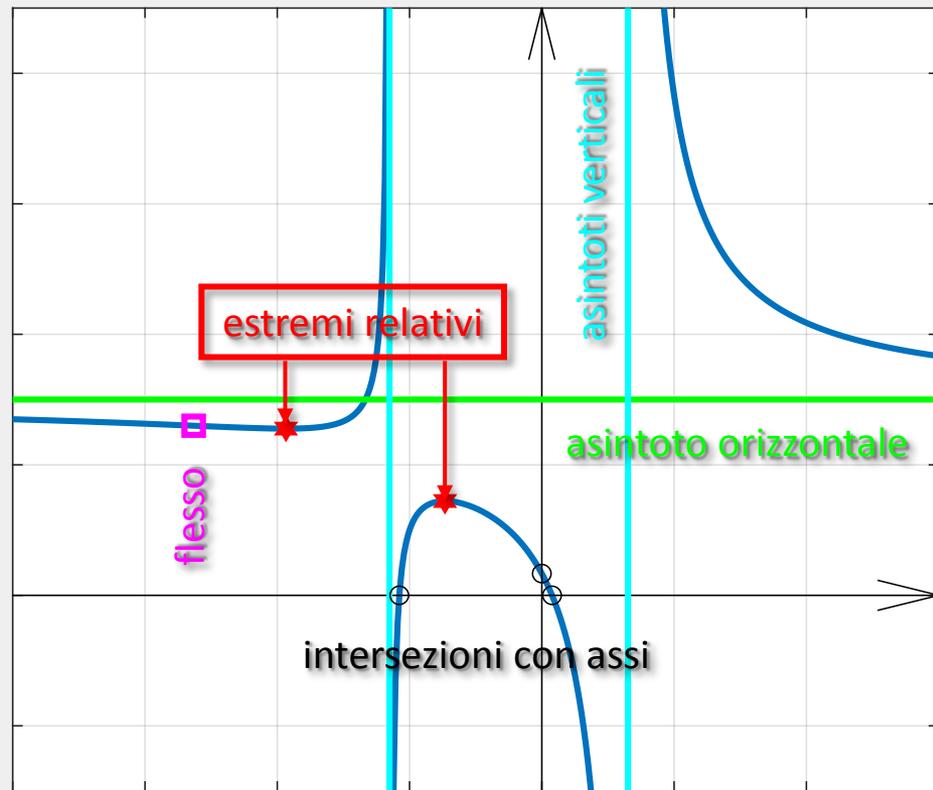
```
line([asint_V';asint_V'],[AX(3:4);AX(3:4)]','Color','c')
```



```

f0=subs(f,x,0) % intersezione con l'asse y
f0 =
1/3
x0=solve(f) % zeri della funzione
x0 =
- (2*3^(1/2))/3 - 1
 (2*3^(1/2))/3 - 1
plot(0,f0,'ok',x0,zeros(size(x0)),'ok')
f1=simplify(diff(f)) % min e max
f1 =
-(3*x^2+16*x+17)/(x^2+x-3)^2
x_minmax=solve(f1)
x_minmax =
- 13^(1/2)/3 - 8/3
 13^(1/2)/3 - 8/3
y_minmax=simplify(subs(f,x_minmax))
y_minmax =
(2*13^(1/2))/13 + 2
2 - (2*13^(1/2))/13
plot(x_minmax,y_minmax,'hr','MarkerFaceColor','r','MarkerSize',8)
f2=simplify(diff(f,2)); % flessi
x_fles=simplify(solve(f2))
x_fles =
root(z^3 + 8*z^2 + 17*z + 41/3, z, 3)
x_fles=double(x_fles)
x_fles =
-5.2635
y_fles=subs(f,x_fles);
plot(x_fles,y_fles,'sm','LineWidth',2,'MarkerSize',8)

```



radici numeriche

```

disp(roots([1 8 17 41/3]))
-5.2635 + 0i
-1.3682 + 0.85112i
-1.3682 - 0.85112i

```

Algebra Lineare simbolica: esempi [1]

matrice di rotazione di un angolo di t radianti

```
syms t real
A=[cos(t) -sin(t);sin(t) cos(t)];
det(A) determinante
ans =
cos(t)^2+sin(t)^2
simplify(det(A))
ans =
1
A^2
ans =
[ cos(t)^2-sin(t)^2, 2*cos(t)*sin(t) ]
[ -2*cos(t)*sin(t), cos(t)^2-sin(t)^2 ]
simplify(A^2)
ans =
[cos(2*t), -sin(2*t)]
[sin(2*t), cos(2*t)]
```

matrice di rotazione di $2t$

A è matrice ortogonale

```
A'*A
ans =
[ cos(t)^2+sin(t)^2, 0 ]
[ 0, cos(t)^2+sin(t)^2 ]
simplify(A'*A)
ans =
[1, 0]
[0, 1]
A*A'
ans =
[ cos(t)^2+sin(t)^2, 0 ]
[ 0, cos(t)^2+sin(t)^2 ]
simplify(A*A')
ans =
[1, 0]
[0, 1]
```

il prodotto di due matrici di rotazione è la rotazione dell'angolo somma dei due angoli

Algebra Lineare simbolica: esempi [2]

```
syms a b c d real
```

```
A=[a b;c d]; det(A)
```

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

```
ans =
```

```
a*d - b*c
```

```
v=A(:,1) + 0.5*A(:,2);
```

$$v = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

```
rank(A) == rank([A v])
```

```
ans =
```

```
logical
```

```
1
```

Teor. di Rouché-Capelli $Ax = v$

```
A1=inv(A)
```

Teor. di Cramer

```
ans =
```

```
[ d/(a*d - b*c), -b/(a*d - b*c)]
```

```
[ -c/(a*d - b*c), a/(a*d - b*c)]
```

```
A1*A
```

```
ans =
```

```
[(a*d)/(a*d-b*c)-(b*c)/(a*d-b*c), 0]
```

```
[ 0, (a*d)/(a*d-b*c)-(b*c)/(a*d-b*c)]
```

```
simplify(A1*A)
```

```
ans =
```

```
[1, 0]
```

```
[0, 1]
```

```
syms p q; y=[p;q]; x=A\y
```

```
x =
```

risolve il sistema

```
[ (d*p-q*b)/(a*d-b*c)]
```

```
[ (-c*p+a*q)/(a*d-b*c)]
```

```
disp(simplify(A*x))
```

```
p
```

```
q
```

verifica la soluzione

```
syms a b
```

```
A=[a a;b b]
```

A = 2 colonne uguali

```
[a, a]
```

```
[b, b]
```

```
colspace(A)
```

Spazio delle Colonne

```
ans =
```

```
[ 1]
```

```
[ b/a]
```

```
null(A)
```

Spazio Nullo

```
ans =
```

```
[-1]
```

```
[ 1]
```

$\mathcal{N}(A)$ Spazio Nullo di $A(m,n)$:
 $\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax=0\}$

$\mathcal{R}(A)$ Spazio delle Colonne di $A(m,n)$:
 $\mathcal{R}(A) = \{u \in \mathbb{R}^m : \exists x : u=Ax\}$

Algebra Lineare simbolica: esempi [3]

$A(n \times n)$

λ **autovalore** $\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists x \neq \underline{0} : Ax = \lambda x$

v **autovettore** relativo a $\lambda \stackrel{\text{def}}{\iff} Av = \lambda v$

```
syms a b c real
A=[a,b,c; b,c,a; c,a,b]
A =
[ a, b, c]
[ b, c, a]
[ c, a, b]
```

```
[v,lambda]=eig(A);
lambda=simplify(lambda)
```

```
lambda =
[(a^2-a*b-a*c+b^2-b*c+c^2)^(1/2), 0, 0]
[ 0, -(a^2-a*b-a*c+b^2-b*c+c^2)^(1/2), 0]
[ 0, 0, a+b+c]
```

```
v=simplify(v)
v =
[-(a^2-a*b-a*c+b^2-b*c+c^2)^(1/2)/(a-c)-(a-b)/(a-c), (a^2-a*b-a*c+b^2-b*c+c^2)^(1/2)/(a-c)-(a-b)/(a-c), 1]
[(a^2-a*b-a*c+b^2-b*c+c^2)^(1/2)/(a-c)-(b-c)/(a-c), -(a^2-a*b-a*c+b^2-b*c+c^2)^(1/2)/(a-c)-(b-c)/(a-c), 1]
[ 1, 1]
```

```
disp(simplify(A*v(:,1)-lambda(1,1)*v(:,1))) verifica
```

```
0
0
0
```

```
disp(all(simplify(A*v(:,1) == lambda(1,1)*v(:,1))))
1 vero
```

```
disp(simplify(A*v(:,2)-lambda(2,2)*v(:,2)))
```

```
0
0
0
```

```
disp(all(simplify(A*v(:,2) == lambda(2,2)*v(:,2))))
1 vero
```

```
disp(simplify(A*v(:,3)-lambda(3,3)*v(:,3)))
```

```
0
0
0
```

```
disp(all(simplify(A*v(:,3) == lambda(3,3)*v(:,3))))
1 vero
```

$\forall k \lambda(k,k) =$ autovalore e $v(:,k) =$ relativo autovettore di A

Equazioni Differenziali Simboliche: esempi [1]

```
syms y(t)
Y=dsolve(diff(y,t) == 1+y^2)
```

```
Y =
    tan(C1 + t)
    1i
   -1i
```

soluzione generale
dipendente da una
costante arbitraria

```
Y1=diff(Y)
Y1 =
    verifica
```

```
tan(C1 + t)^2 + 1
    0
    0
```

```
Y=dsolve(diff(y,t) == 1+y^2, y(0)==1)
```

```
Y =
    tan(t+pi/4)
```

soluzione particolare

```
Y1=diff(Y)
```

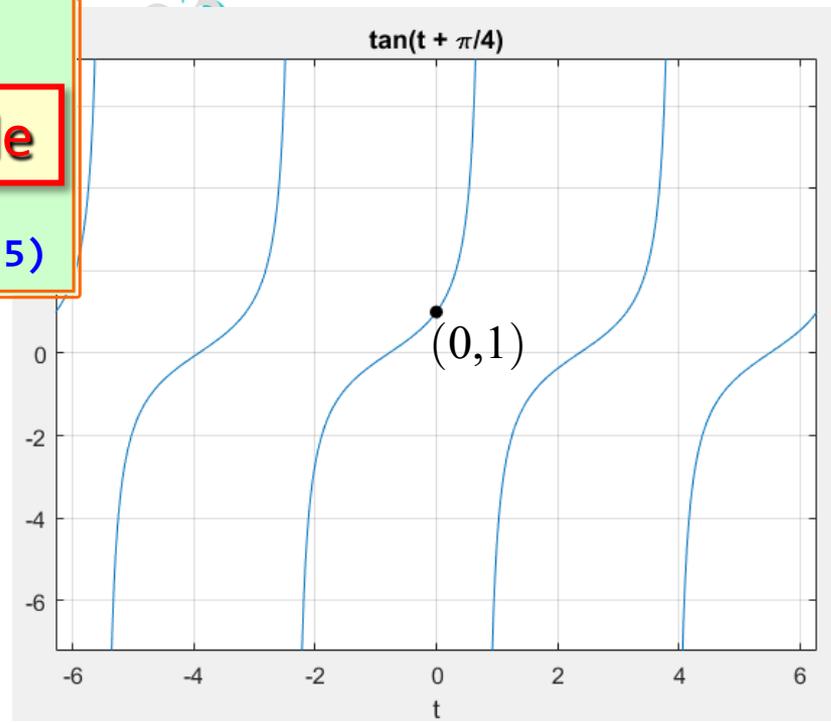
```
Y1 =
    tan(t + pi/4)^2 + 1
```

```
h=ezplot(Y);
grid on; hold on
plot(0,1,'ok','MarkerFace','k','MarkerSize',5)
```

condizione iniziale

$$y' = 1 + y^2$$

$$\begin{cases} y' = 1 + y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$



Equazioni Differenziali Simboliche: esempi [2]

equazione differenziale del 2° ordine: IVP

```
syms y(t)
D1y=diff(y,t); D2y=diff(y,t,2);
Y=dsolve(D2y == cos(2*t)-y, y(0) == 1, D1y(0) == 0);
```

```
simplify(Y)
```

```
ans =
```

```
1 - (8*sin(t/2)^4)/3
```

```
simplify(diff(Y,t,2) - cos(2*t) + Y)
```

```
ans =
```

```
0
```

$$\begin{cases} y'' = \cos(2t) - y \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

2 condizioni iniziali

sistema di 2 equazioni differenziali del 1° ordine

```
syms f(t) g(t); eqns=[diff(f,t) == 3*f+4*g, diff(g,t) == -4*f+3*g];
[F,G]=dsolve(eqns); F=simplify(F), G=simplify(G)
```

```
F =
soluzione generale
exp(3*t)*(C2*cos(4*t) + C1*sin(4*t))
G =
exp(3*t)*(C1*cos(4*t) - C2*sin(4*t))
```

$$\begin{cases} f' = +3f + 4g \\ g' = -4f + 3g \end{cases}$$

```
S=dsolve(eqns) soluzione generale
S = struct with fields:
g: C1*cos(4*t)*exp(3*t) - C2*sin(4*t)*exp(3*t)
f: C2*cos(4*t)*exp(3*t) + C1*sin(4*t)*exp(3*t)
```

```
eqns=...; conds=[f(0) == 0, g(0) == 1];
[F,G]=dsolve(eqns, conds)
```

```
F =
sin(4*t)*exp(3*t) soluzione particolare
G =
cos(4*t)*exp(3*t)
```

```
[F,G]=dsolve(eqns, f(0) == 0, g(0) == 1)
```

```
F =
sin(4*t)*exp(3*t) soluzione particolare
G =
cos(4*t)*exp(3*t)
```

Equazioni Differenziali Simboliche: esempi [3]

Si consideri il seguente problema di PDE per l'equazione delle onde **monodimensionale** con condizioni iniziali (IC) e al contorno (BC):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(x, 0^+) = \frac{x \sin(3x)}{6} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0^+) = \frac{\sin(3x)}{6} + \frac{x \cos(3x)}{2} \\ u(0, t) = \frac{t \sin(3t)}{6} \\ u(L, t) = \frac{(L+t) \sin[3(L+t)]}{6} \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{IC} \\ \text{BC} \end{array}$$

soluzione analitica

$$u(t, x) = \frac{(x+t) \sin[3(x+t)]}{6}$$

* tratteremo più avanti la **Trasformata di Laplace**, per ora sfruttiamo il Symbolic Math Toolbox.

Per la risoluzione, si applica al problema di PDE il **metodo della Trasformata di Laplace*** rispetto a t , $U(x, s) = \mathcal{L}_t[u(t, x)]$, che trasforma il problema di PDE in uno di ODE e che produce il seguente BVP (**Boundary Value Problem**):

$$\left\{ \begin{array}{l} U'' = s^2 U - (sx+1) \frac{\sin(3x)}{6} - x \frac{\cos(3x)}{2}, \quad 0 < x < L, \quad s \in \mathbb{C} \\ U(0, s) = \frac{s}{(s^2+9)^2} \\ U(L, s) = \frac{s \cos(3L) - 3 \sin(3L)}{(s^2+9)^2} + \frac{(sL+1) \sin(3L) + 3L \cos(3L)}{6(s^2+9)} \end{array} \right.$$

soluzione analitica

$$U(x, s) = \frac{(sx+1) \sin(3x) + 3x \cos(3x)}{6(s^2+9)} + \frac{s \cos(3x) - 3 \sin(3x)}{(s^2+9)^2}$$

Equazioni Differenziali Simboliche: esempi [3a]

La variabile complessa s , introdotta dalla Trasformazione di Laplace, è considerata un parametro e sarà ignorata nel risolvere simbolicamente il problema di BVP mediante la funzione **dsolve()**.

```
syms x L real;    syms s;    syms U(x) % considera s come parametro
ODE = diff(U,x,2) == s^2*U - (s*x+1)*sin(3*x)/6 - x*cos(3*x)/2;

cond1 = U(0) == s/(s^2+9)^2;
cond2 = U(L) == (s*cos(3*L)-3*sin(3*L))/(s^2+9)^2 + ...
               ((s*L+1)*sin(3*L)+3*L*cos(3*L))/(6*(s^2+9));
conds = [cond1, cond2]; % condizioni ai limiti

Usol = dsolve(ODE, conds); % risolve simbolicamente il BVP

% soluzione analitica nota
Utrue = ((s*x+1)*sin(3*x)+3*x*cos(3*x))/(6*(s^2+9)) + ...
        (s*cos(3*x)-3*sin(3*x))/(s^2+9)^2;

% confronto
fprintf('\nVerifica che sia la soluzione corretta: Usol - Utrue = ');
disp(simplify(Usol - Utrue))
Verifica che sia la soluzione corretta: Usol - Utrue =
0
```

Download live script:
[wave_BVP.mlx](#)

Equazioni Differenziali Simboliche: esempi [3b]

Calcolata la Trasformata di Laplace $U(x,s)$ come soluzione del BVP, per determinare simbolicamente la soluzione del problema di PDE si calcola la **Trasformata Inversa di Laplace** mediante la funzione simbolica **ilaplace()**:

```
syms t real; u = simplify(ilaplace(Usol,s,t))
```

```
u =
```

$$\frac{\sin(3t + 3x)(t + x)}{6}$$

```
uTRUE = (x+t)*sin(3*(x+t))/6; % soluzione analitica nota
```

```
% confronto
```

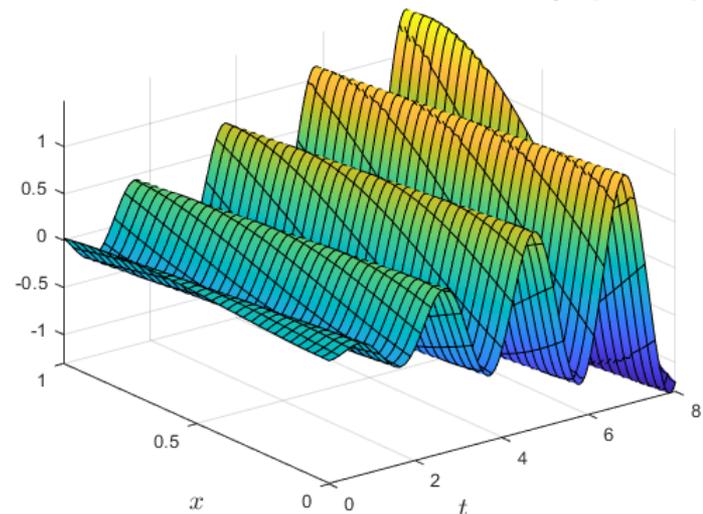
```
fprintf("\nVerifica che l'antitrasformata u(t,x) sia corretta: u -  
uTRUE = "); disp(simplify(u - uTRUE))
```

```
Verifica che l'antitrasformata u(t,x) sia corretta: u - uTRUE =
```

```
0
```

Download live script:
[wave_BVP.mlx](#)

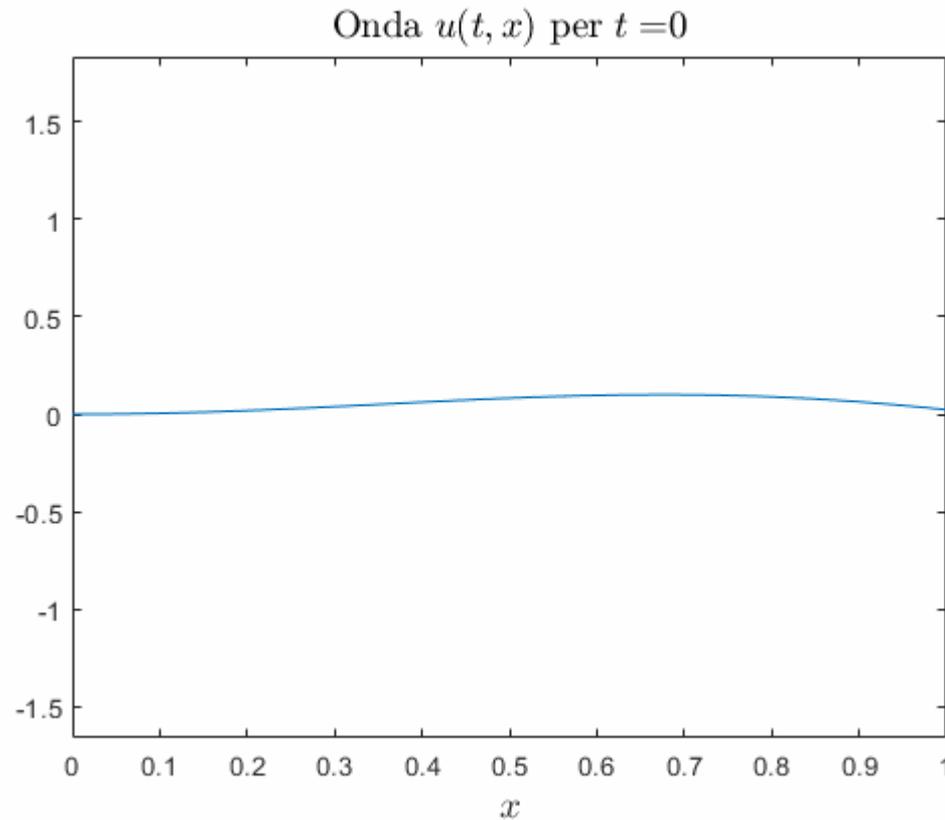
Inverse Laplace Transform: $u(t, x) = \mathcal{L}_t^{-1}[U(x, s)]$



Laurea Magistrale
Applicazioni di
Prof. Maria
A.A. 20

Equazioni Differenziali Simboliche: esempi [3c]

Crea l'animazione dell'onda al variare del tempo



Download live script:
[wave_BVP.mlx](#)

Equazioni Differenziali Simboliche: esempi [4]

Download live script:

[tsunami4.mlx](#)

Questo esempio è una versione modificata dell'esempio MATLAB* *"Solving Partial Differential Equations"* che simula il fenomeno dell'**onda di uno tsunami**, utilizzando il *Symbolic Math Toolbox* per risolvere equazioni differenziali.

* da cercare nell'Help Browser

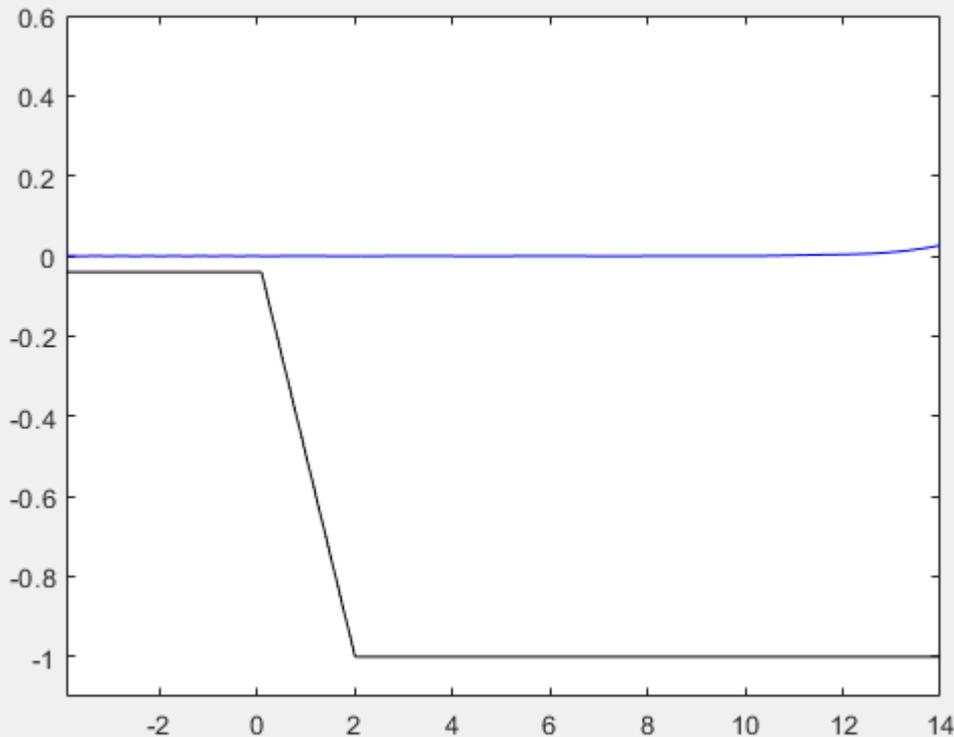


Grafico delle funzioni: $f(x - ct)$ e $f(x + ct)$

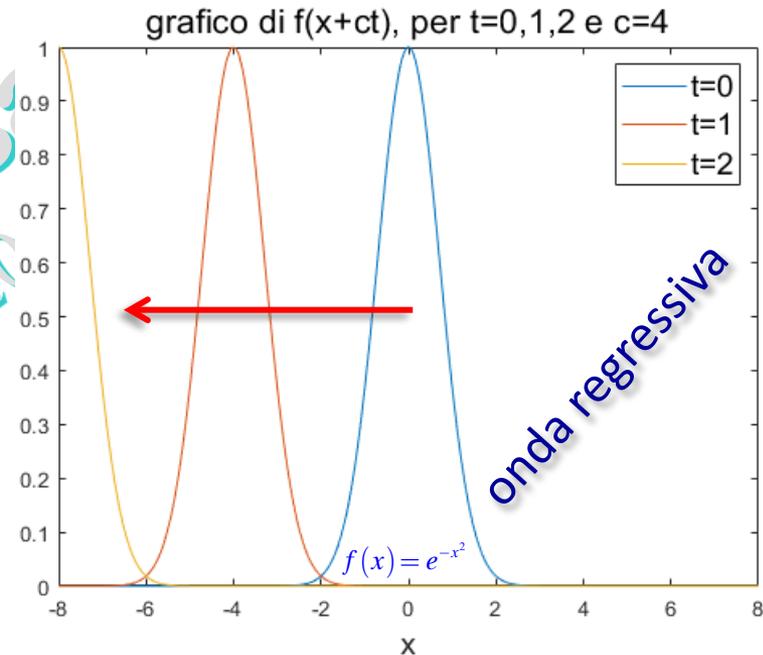
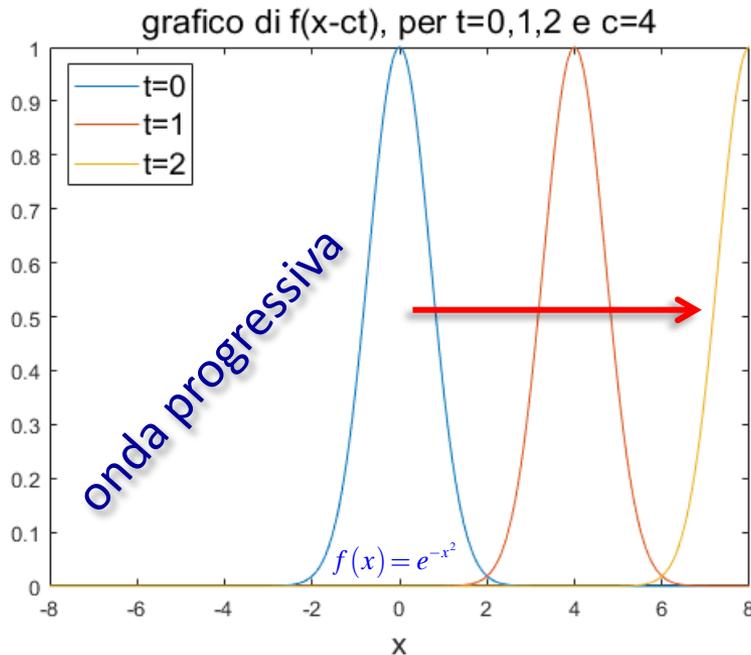
$$f(\xi) = e^{-\xi^2}$$

non periodica

```
f=@(X) exp(-X.^2); c=4; syms x real
```

```
F=[f(x);f(x-c);f(x-2*c)];  
figure(1); clf; fplot(F,[-8 8]); xlabel('x')  
title('grafico di f(x-ct), per t=0,1,2')
```

```
F=[f(x);f(x+c);f(x+2*c)];  
figure(2); clf; fplot(F,[-8 8]); xlabel('x')  
title('grafico di f(x+ct), per t=0,1,2')
```



In $f(x-ct)$ e in $f(x+ct)$ il grafico di $f(x)$ si sposta immutato rispettivamente verso destra o verso sinistra di un passo spaziale pari a ct .

$f(x - ct)$ e $f(x + ct)$ soddisfano l'eq. delle onde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

eq. delle onde 1D

$f(x - ct)$

```
f=@(X) exp(-X.^2); syms c t x real
syms u(x,t); u=f(x-c*t);
simplify( diff(u,t,2) - c^2*diff(u,x,2) )
ans =
0
```

$f(x + ct)$

```
f=@(X) exp(-X.^2); syms c t x real
syms u(x,t); u=f(x+c*t);
simplify( diff(u,t,2) - c^2*diff(u,x,2) )
ans =
0
```

$f(x - ct) + f(x + ct)$

```
f=@(X) exp(-X.^2); syms c t x real
syms u(x,t); u=f(x-c*t) + f(x+c*t);
simplify( diff(u,t,2) - c^2*diff(u,x,2) )
ans =
0
```

$$\forall c > 0 \wedge \forall f(\xi), g(\chi) \in C^2(a,b) \Rightarrow u(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

soluzione di D'Alembert

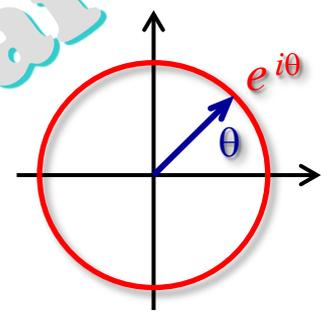
$u(x,t)$ soddisfa l'equazione delle onde

$e^{i\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)}$ $e^{i\omega\left(t+\frac{x}{c}\right)}$
 ↑ **e** ↑
 complesse
 $i = \sqrt{-1}$

soddisfano l'eq. delle onde

per la **Formula di Eulero**: $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$



```

e^{i\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)}
syms c t w x real
syms u(x,t); u=exp(1i*w*(t-x/c));
simplify( diff(u,t,2) - c^2*diff(u,x,2) )
ans =
0
    
```

```

e^{i\omega\left(t+\frac{x}{c}\right)}
syms c t w x real
syms u(x,t); u=exp(1i*w*(t+x/c));
simplify( diff(u,t,2) - c^2*diff(u,x,2) )
ans =
0
    
```

```

e^{i\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)} + e^{i\omega\left(t+\frac{x}{c}\right)}
syms c t w x real
syms u(x,t); u=exp(1i*w*(t-x/c)) + exp(1i*w*(t+x/c));
simplify( diff(u,t,2) - c^2*diff(u,x,2) )
ans =
0
    
```

Grafici delle funzioni $e^{i\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)}$ e $e^{i\omega\left(t+\frac{x}{c}\right)}$ rispetto a x

complesse e periodiche

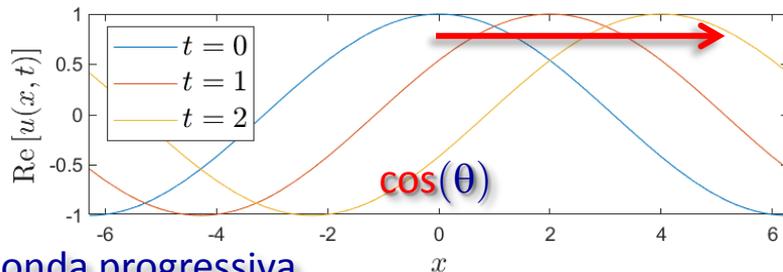
$$e^{i\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)} = e^{-i\frac{\omega}{c}(x-ct)}$$

$$e^{i\omega\left(t+\frac{x}{c}\right)} = e^{+i\frac{\omega}{c}(x+ct)}$$

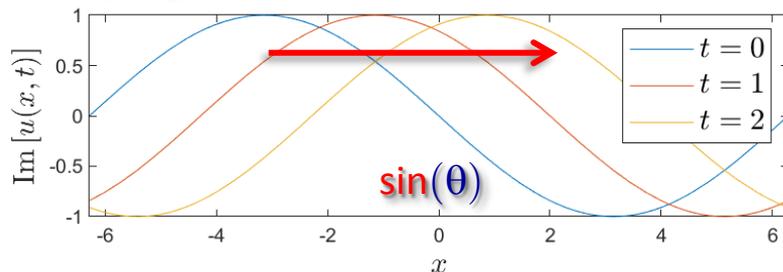
ω frequenza angolare temporale
 ω/c frequenza angolare spaziale

```
w=1; c=2; syms x real; f1=@(X,T) exp(1i*w*(T-X/c)); f2=@(X,T) exp(1i*w*(T+X/c));
F1=[f1(x,0);f1(x,1);f1(x,2)];
figure(1); subplot(2,1,1); h=fplot(real(F1),[-2*pi 2*pi]);
legend(h,'$t=0$', '$t=1$', '$t=2$', 'FontSize',14,'Interpreter','LaTeX','Location','NorthWest')
xlabel('$x$', 'FontSize',14,'Interpreter','LaTeX'); ylabel('parte reale','FontSize',14)
subplot(2,1,2); h=fplot(imag(F1),[-2*pi 2*pi]);
legend(h,'$t=0$', '$t=1$', '$t=2$', 'FontSize',14,'Interpreter','LaTeX','Location','NorthWest')
xlabel('$x$', 'FontSize',14,'Interpreter','LaTeX'); ylabel('parte immaginaria','FontSize',14)
sgtitle(['grafici di $e^{i\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)}$, per $t=0,1,2$, '$\omega=$' ...
num2str(w) '$ e $c=' num2str(c) '$'],'FontSize',16,'FontWeight','normal','Interpreter','LaTeX')
F2=[f2(x,0);f2(x,1);f2(x,2)]; figure(2); ... analoghe istruzioni
```

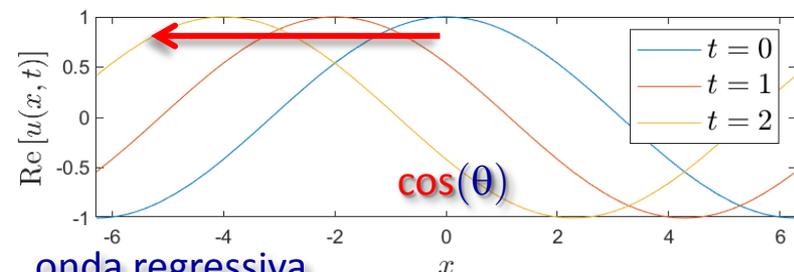
grafici di $u(x, t) = e^{i\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)}$, per $t = 0, 1, 2$, $\omega = 1$ e $c = 2$



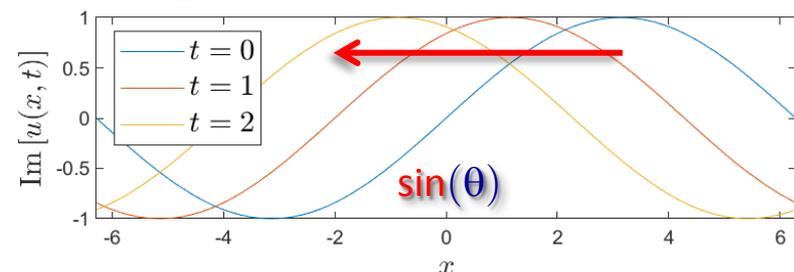
onda progressiva



grafici di $u(x, t) = e^{i\omega\left(t+\frac{x}{c}\right)}$, per $t = 0, 1, 2$, $\omega = 1$ e $c = 2$



onda regressiva



Grafici delle funzioni $e^{i\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)}$ e $e^{i\omega\left(t+\frac{x}{c}\right)}$ rispetto a t

complesse e
periodiche

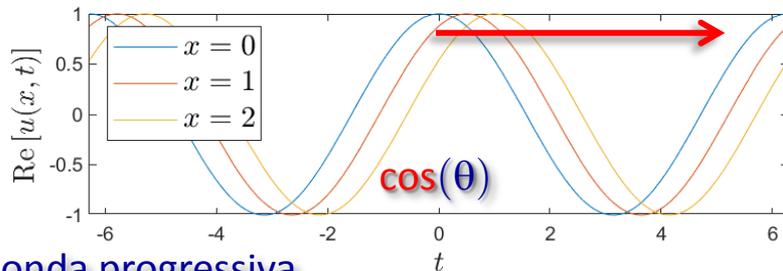
$$e^{i\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)} = e^{-i\frac{\omega}{c}(x-ct)}$$

$$e^{i\omega\left(t+\frac{x}{c}\right)} = e^{+i\frac{\omega}{c}(x+ct)}$$

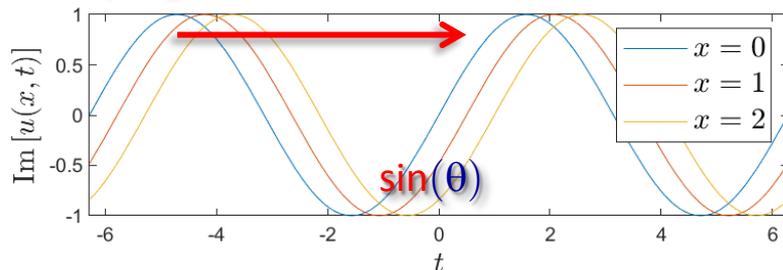
ω frequenza angolare temporale
 ω/c frequenza angolare spaziale

```
w=1; c=2; syms t real; f1=@(X,T) exp(1i*w*(T-X/c)); f2=@(X,T) exp(1i*w*(T+X/c));
F1=[f1(0,t);f1(1,t);f1(2,t)];
figure(1); subplot(2,1,1); h=fplot(real(F1),[-2*pi 2*pi]);
legend(h, '$x=0$', '$x=1$', '$x=2$', 'FontSize',14,'Interpreter','LaTeX','Location','NorthWest');
xlabel('$t$', 'FontSize',14,'Interpreter','LaTeX'); ylabel('parte reale', 'FontSize',14);
subplot(2,1,2); h=fplot(imag(F1),[-2*pi 2*pi]);
legend(h, '$x=0$', '$x=1$', '$x=2$', 'FontSize',14,'Interpreter','LaTeX','Location','NorthWest');
xlabel('$t$', 'FontSize',14,'Interpreter','LaTeX'); ylabel('parte immaginaria', 'FontSize',14);
sgtitle(['grafici di $e^{i\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)}$, per $x=0,1,2$, '$\omega=$' ...
num2str(w) '$ e $c=$' num2str(c) '$'], 'FontSize',16, 'FontWeight', 'normal', 'Interpreter', 'LaTeX');
F2=[f2(0,t);f2(1,t);f2(2,t)]; figure(2); ... analoghe istruzioni
```

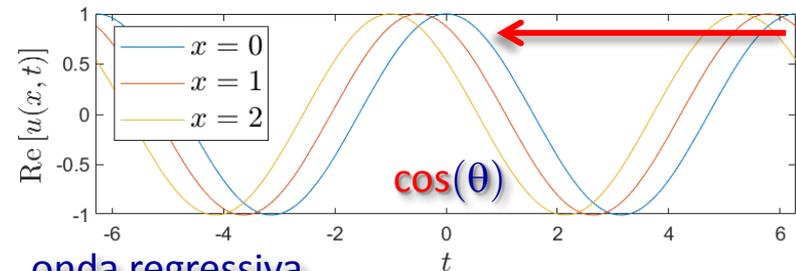
grafici di $u(x,t) = e^{i\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)}$, per $x = 0, 1, 2$, $\omega = 1$ e $c = 2$



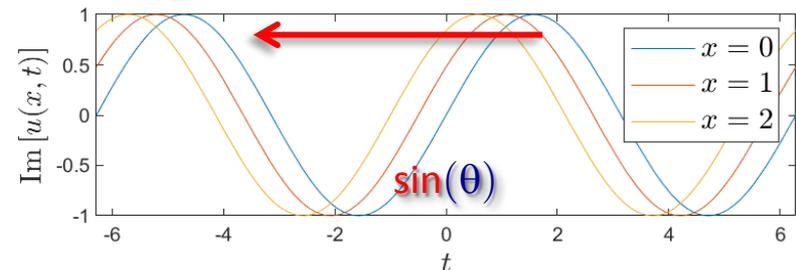
onda progressiva



grafici di $u(x,t) = e^{i\omega\left(t+\frac{x}{c}\right)}$, per $x = 0, 1, 2$, $\omega = 1$ e $c = 2$



onda regressiva



funzione $e^{i\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)}$ come onda

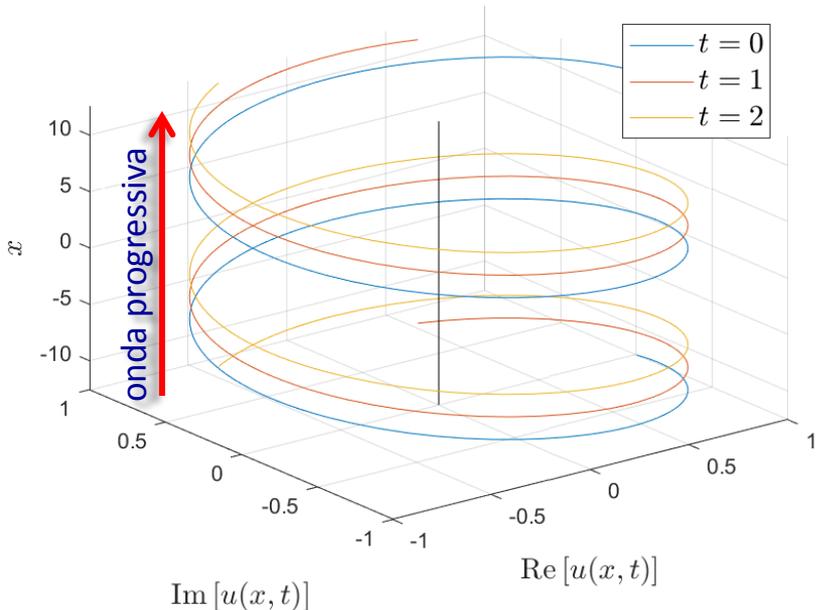
complessa e periodica

$$e^{i\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)} = e^{-i\frac{\omega}{c}(x-ct)}$$

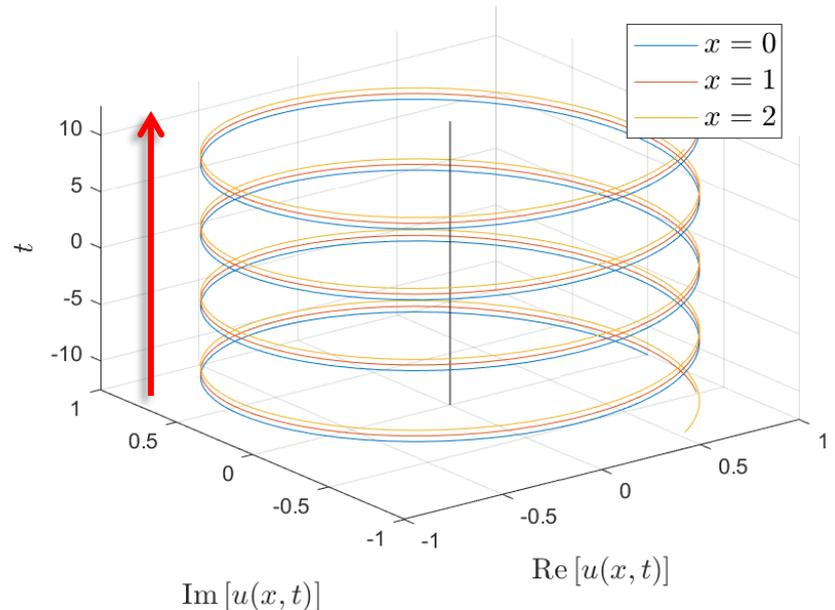
ω frequenza angolare temporale
 ω/c frequenza angolare spaziale

```
w=1; c=2; syms x t real; f1=@(X,T)exp(1i*w*(T-X/c)); f2=@(X,T)exp(1i*w*(T+X/c));
F1=[f1(x,0);f1(x,1);f1(x,2)];
figure(1); h=fplot3(real(F),imag(F),x*ones(3,1),[-4*pi 4*pi]);
AX=axis; line(zeros(2,1),zeros(2,1),AX(5:6),'Color','k')
legend(h,'t=0','t=1','t=2','FontSize',14,'Interpreter','LaTeX','Location','NorthWest')
xlabel('\rm real\left[u(x,t)\right]','FontSize',14,'Interpreter','LaTeX')
ylabel('\rm imag\left[u(x,t)\right]','FontSize',14,'Interpreter','LaTeX')
zlabel('$x$','FontSize',14,'Interpreter','LaTeX')
title(['grafici di $u(x,t)=e^{i\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)}$, per $t=0,1,2$, ' ...
'$\omega=$' num2str(w) '$ e $c=$' num2str(c) '$'], ...
'FontSize',16,'FontWeight','normal','Interpreter','LaTeX')
F2=[f2(0,t);f2(1,t);f2(2,t)]; figure(2); ... analoghe istruzioni
```

grafici di $u(x, t) = e^{i\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)}$, per $t = 0, 1, 2$, $\omega = 1$ e $c = 2$



grafici di $u(x, t) = e^{i\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)}$, per $x = 0, 1, 2$, $\omega = 1$ e $c = 2$



funzione $e^{i\omega\left(t+\frac{x}{c}\right)}$ come onda

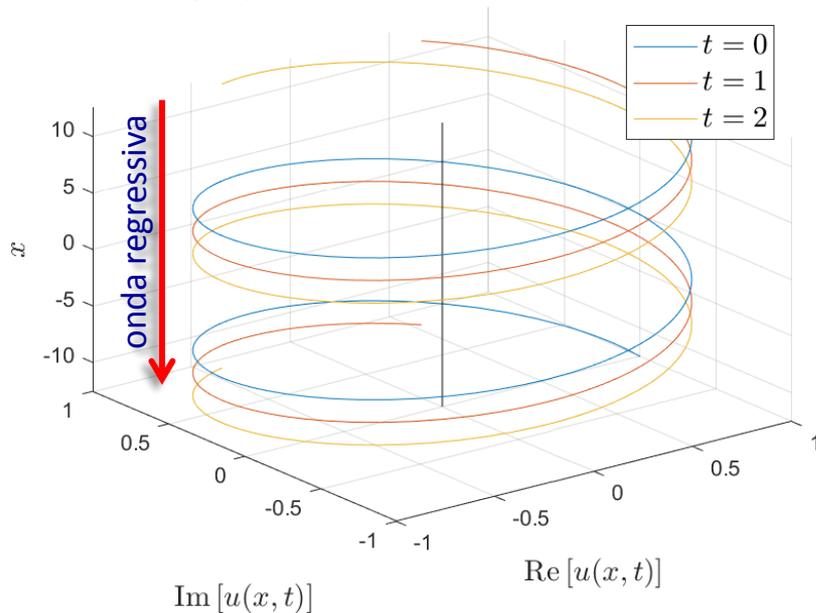
complessa e
periodica

$$e^{i\omega\left(t+\frac{x}{c}\right)} = e^{+i\frac{\omega}{c}(x+ct)}$$

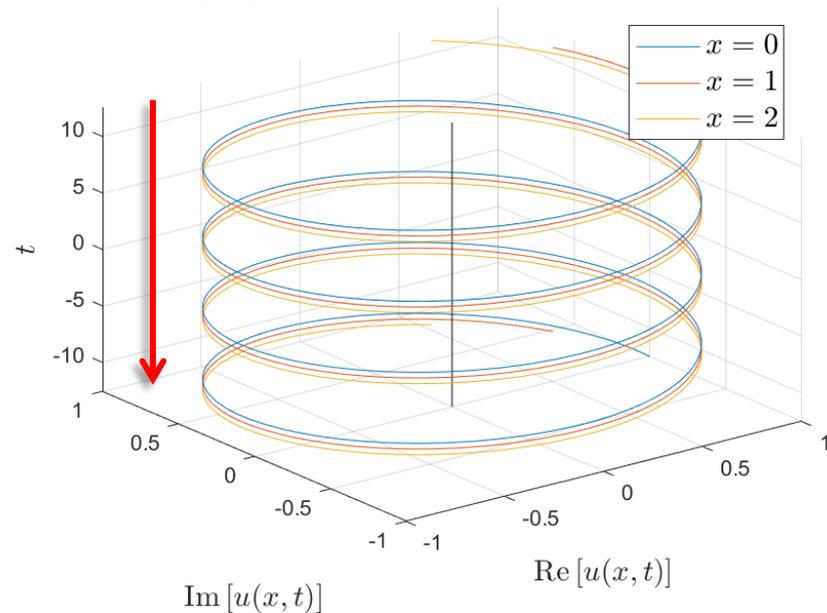
ω frequenza angolare temporale
 ω/c frequenza angolare spaziale

```
w=1; c=2; syms x t real; f1=@(X,T)exp(1i*w*(T-X/c)); f2=@(X,T)exp(1i*w*(T+X/c));  
F2=[f2(0,t);f2(1,t);f2(2,t)];  
figure(2); ... analoghe istruzioni
```

grafici di $u(x, t) = e^{i\omega\left(t+\frac{x}{c}\right)}$, per $t = 0, 1, 2$, $\omega = 1$ e $c = 2$



grafici di $u(x, t) = e^{i\omega\left(t+\frac{x}{c}\right)}$, per $x = 0, 1, 2$, $\omega = 1$ e $c = 2$



funzione $f(x)e^{\pm i\omega t}$ come onda stazionaria (standing wave)

$f(x) = e^{-x^2}$
non periodica

$$u_1(x,t) = f(x)e^{+i\omega t}$$

$$u_2(x,t) = f(x)e^{-i\omega t}$$

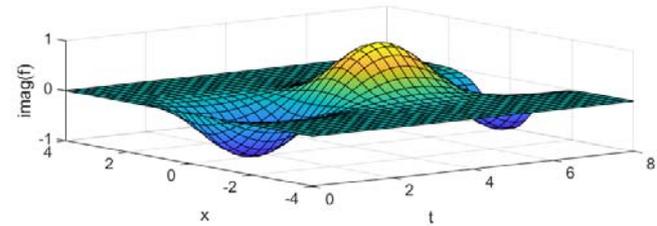
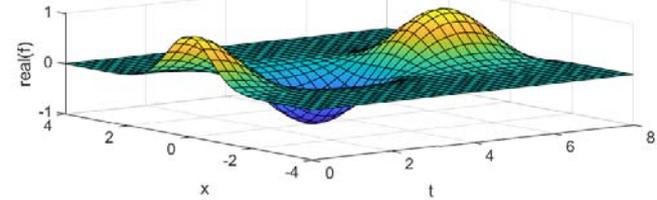
complesso coniugato

$$\Rightarrow u_2(x,t) = u_1^*(x,t)$$

```

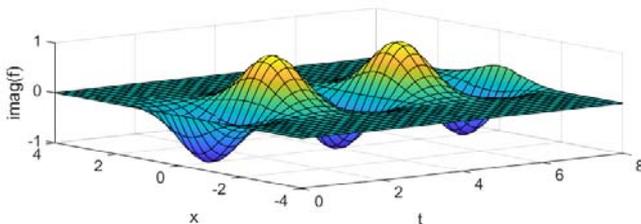
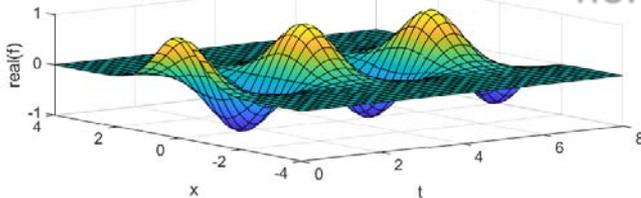
pf=@(X) exp(-X.^2);    syms t x real
f1=@(X,T,W) pf(X)*exp(-1i*W*T);
F=[f1(x,t,1); f1(x,t,2); f1(x,t,3)];
figure
subplot(2,1,1), fsurf(real(F(1))],[0 8 -4 4])
subplot(2,1,2), fsurf(imag(F(1))],[0 8 -4 4])
figure
subplot(2,1,1), fsurf(real(F(2))],[0 8 -4 4])
subplot(2,1,2), fsurf(imag(F(2))],[0 8 -4 4])
figure
subplot(2,1,1), fsurf(real(F(3))],[0 8 -4 4])
subplot(2,1,2), fsurf(imag(F(3))],[0 8 -4 4])
    
```

$$f(x,t) = \exp(-x^2) \exp(-i \cdot 1 \cdot t), \quad w=1$$

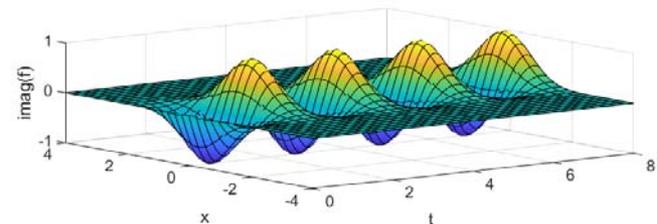
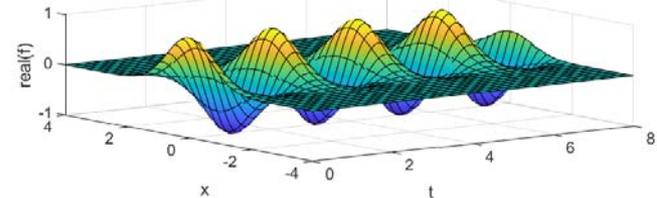


L'onda oscilla nel tempo ma non si sposta nello spazio

$$f(x,t) = \exp(-x^2) \exp(-i \cdot 2 \cdot t), \quad w=2$$



$$f(x,t) = \exp(-x^2) \exp(-i \cdot 3 \cdot t), \quad w=3$$



funzione $f(x - ct)e^{\pm i\omega t}$ come onda mobile

(travelling wave)

onda progressiva ↓

$$u_1(x,t) = f(x - ct)e^{+i\omega t}$$

complesso coniugato

$$u_2(x,t) = f(x - ct)e^{-i\omega t}$$

$$\Rightarrow u_2(x,t) = \overline{u_1(x,t)}$$

$$u_3(x,t) = f(x + ct)e^{+i\omega t}$$

$$u_4(x,t) = f(x + ct)e^{-i\omega t}$$

$$\Rightarrow u_4(x,t) = \overline{u_3(x,t)}$$

onda regressiva ↑

$$f(\xi) = e^{-\xi^2}$$

non periodica

```
pf=@(X) exp(-X.^2); syms t x real; c=4;
f1=@(X,T,W) pf(X-c*T)*exp(-i*W*T);
f2=@(X,T,W) pf(X-c*T)*exp(+i*W*T);
f3=@(X,T,W) pf(X+c*T)*exp(-i*W*T);
f4=@(X,T,W) pf(X+c*T)*exp(+i*W*T);
F=[f1(x,0,1); f1(x,1,1); f1(x,2,1)]; %w=1
figure; subplot(2,1,1)
```

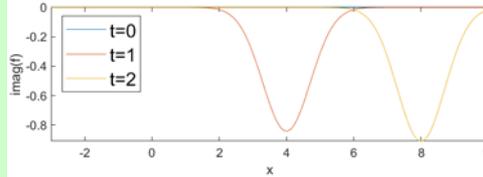
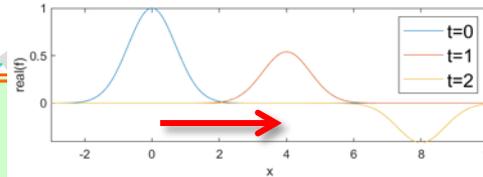
```
h0=fplot(real(F(1)),[-3 10]); hold on
h1=fplot(real(F(2)),[-3 10]);
h2=fplot(real(F(3)),[-3 10]);
legend([h0;h1;h2],'t=0','t=1','t=2')
xlabel('x'); ylabel('real(f)')
subplot(2,1,2)
```

```
h0=fplot(imag(F(1)),[-3 10]); hold on
h1=fplot(imag(F(2)),[-3 10]);
h2=fplot(imag(F(3)),[-3 10]);
legend([h0;h1;h2],'t=0','t=1','t=2')
xlabel('x'); ylabel('imag(f)')
sgtitle('f(x,t) = exp[-(x-c*t)^2]*
```

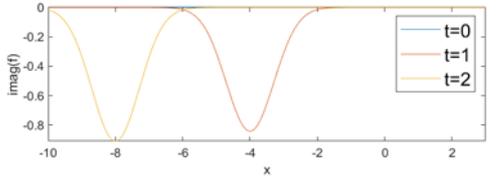
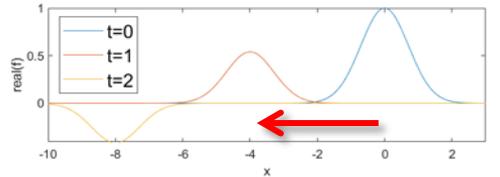
$\exp(-i*w*t)$, c=4, w=1 e t=0,1,2')

...

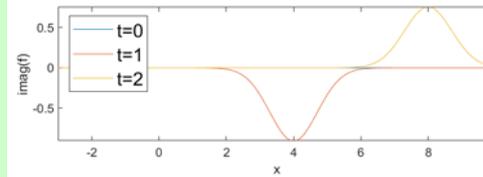
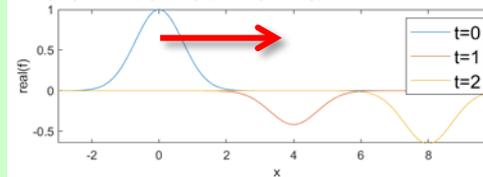
$f(x,t) = \exp[-(x-ct)^2] \cdot \exp(-i \cdot w \cdot t)$, c=4, w=1 e t=0,1,2



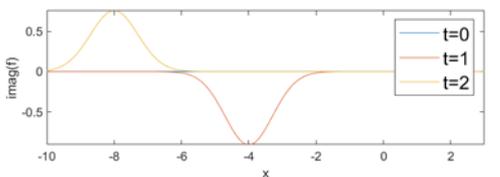
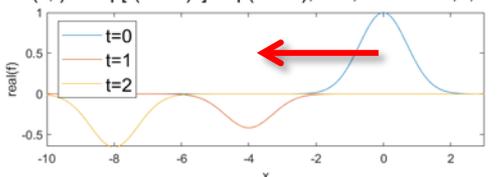
$f(x,t) = \exp[-(x+ct)^2] \cdot \exp(-i \cdot w \cdot t)$, c=4, w=1 e t=0,1,2



$f(x,t) = \exp[-(x-c*t)^2] \cdot \exp(-i \cdot w \cdot t)$, c=4, w=2 e t=0,1,2



$f(x,t) = \exp[-(x+c*t)^2] \cdot \exp(-i \cdot w \cdot t)$, c=4, w=2 e t=0,1,2



L'onda oscilla nel tempo e si sposta nello spazio

Equazioni Differenziali Simboliche: esempi [4.1]

Un'onda solitaria (o **solitone**) è una soluzione della PDE "KdV" di Korteweg-de Vries - 1895 (PDE del 3° ordine, non lineare, iperbolica), che nel caso di 1 dimensione spaziale si scrive:

$$u_t(x,t) + 6u(x,t)u_x(x,t) + u_{xxx}(x,t) = 0$$

La sua soluzione $u(x,t)$ rappresenta lo spostamento verticale delle molecole d'acqua, rispetto alla superficie orizzontale dell'acqua, in qualsiasi posizione x e tempo t .

Fu osservata per la prima volta nel 1834 dall'ingegnere scozzese John Scott Russel, che la chiamò "Onda di Traslazione".

Col cambiamento di coordinate:

$$X = x - ct,$$

c velocità costante dell'onda

si trasforma la PDE nella ODE:

$$-cu'(X) + u'''(X) + 6u(X)u'(X) = 0$$

equivalente a

$$-cu'(X) + u'''(X) - 3D(u^2)/DX = 0$$

Si ottiene alla fine l'espressione analitica della soluzione della PDE KdV:

$$u(x,t) = c/2 \operatorname{sech}^2[\operatorname{sqrt}(c)/2(x-ct-x_0)]$$

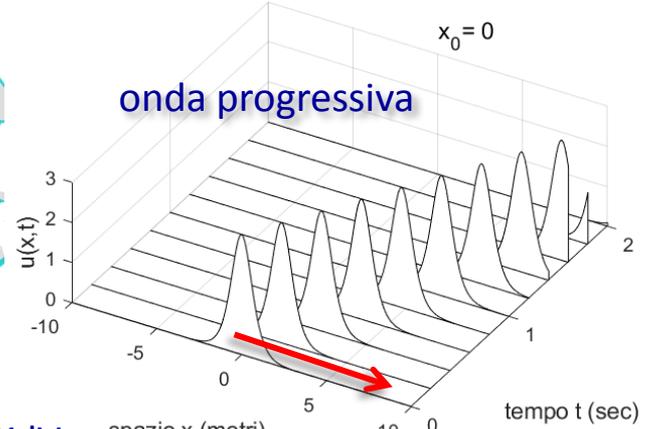
nota come "solitone"; l'onda si muove da sinistra a destra, oppure:

$$u(x,t) = c/2 \operatorname{sech}^2[\operatorname{sqrt}(c)/2(x+ct+x_0)]$$

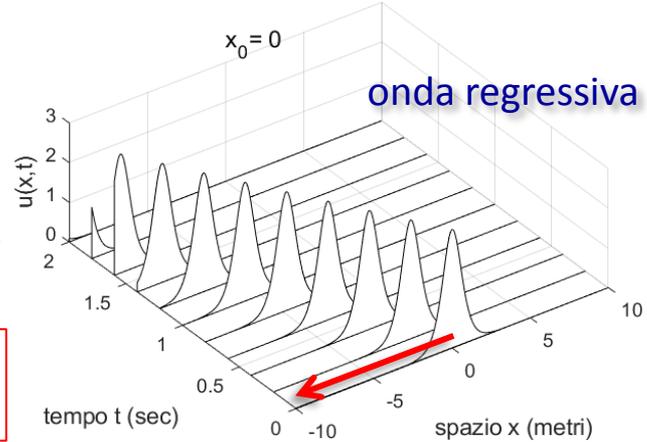
che si muove da destra a sinistra. L'onda viaggia a velocità costante c lungo un canale di profondità costante.

Un **solitone** corrisponde a uno tsunami che viaggia in acque profonde.

Solitone($x-c*t-x_0$) [$c = 6$] in tempi successivi



Solitone($x+c*t+x_0$) [$c = 6$] in tempi successivi

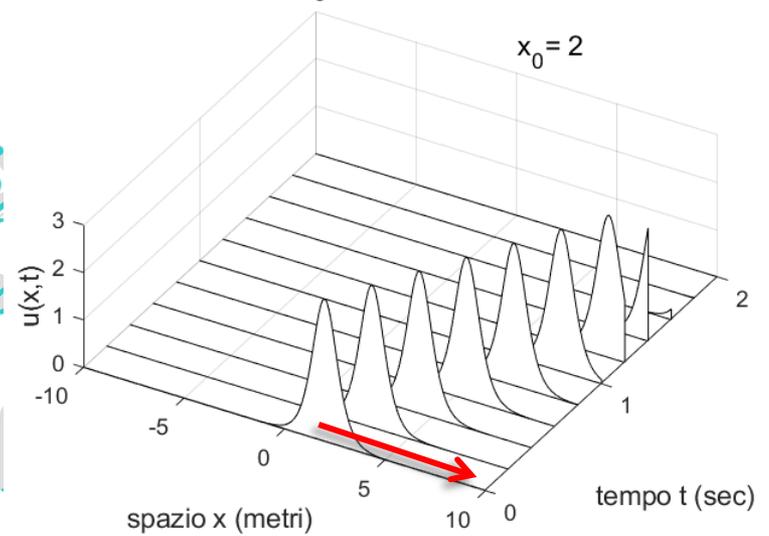
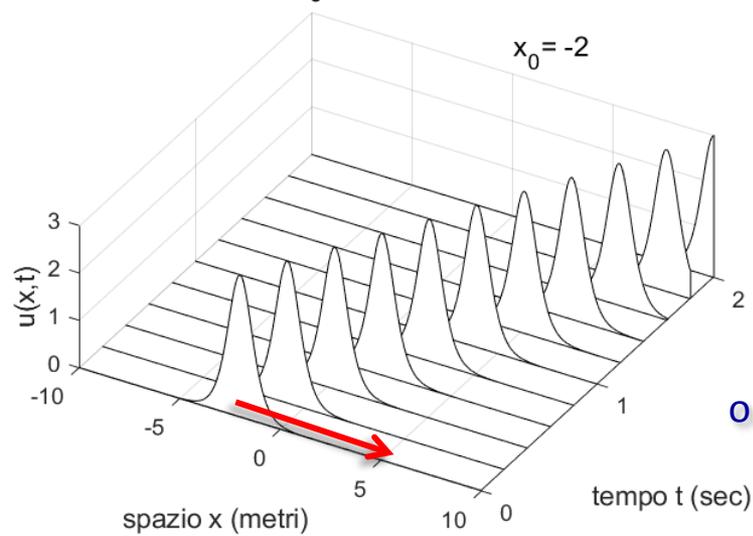


Solitone

$$u(x,t) = c/2 \operatorname{sech}^2[\sqrt{c}/2(x-ct-x_0)]$$

Solitone($x-ct-x_0$) [$c = 6$] in tempi successivi

Solitone($x-ct-x_0$) [$c = 6$] in tempi successivi

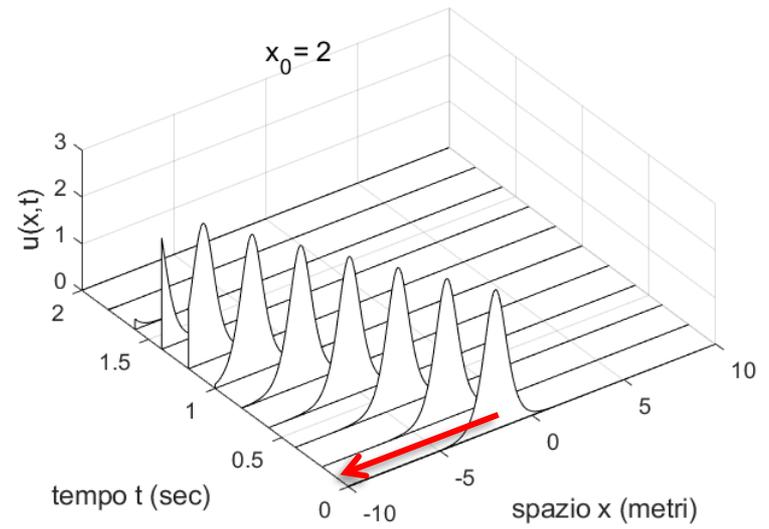
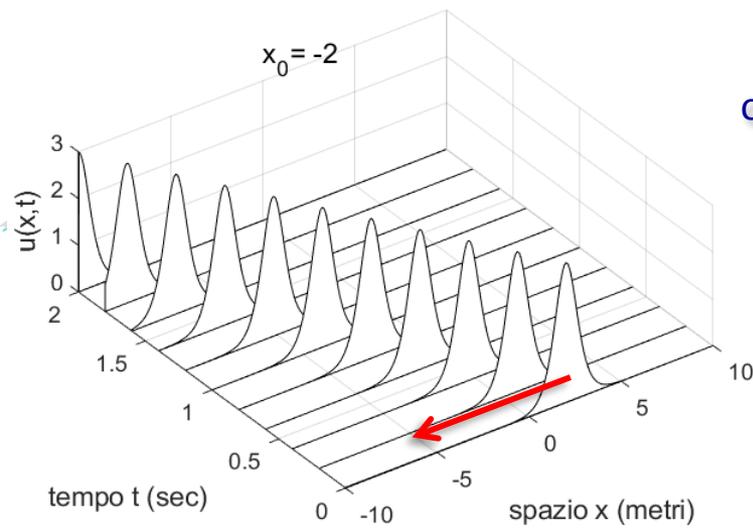


onda progressiva

$$u(x,t) = c/2 \operatorname{sech}^2[\sqrt{c}/2(x+ct+x_0)]$$

Solitone($x+ct+x_0$) [$c = 6$] in tempi successivi

Solitone($x+ct+x_0$) [$c = 6$] in tempi successivi



onda regressiva

Il solitone soddisfa l'Eq. delle Onde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

$$u(x,t) = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\sqrt{c}}{2} (x - ct) \right]$$

onda da sinistra verso destra

```
c=6; u_dx=@(x,t) c/2*sech( sqrt(c)/2*(x - c*t) ).^2;
syms xx tt real; syms u(x,t)
u(x,t)=u_dx(xx,tt);
simplify( diff(u,t,2) - c^2*diff(u,x,2) )
ans =
0
```

$$u(x,t) = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\sqrt{c}}{2} (x + ct) \right]$$

onda da destra verso sinistra

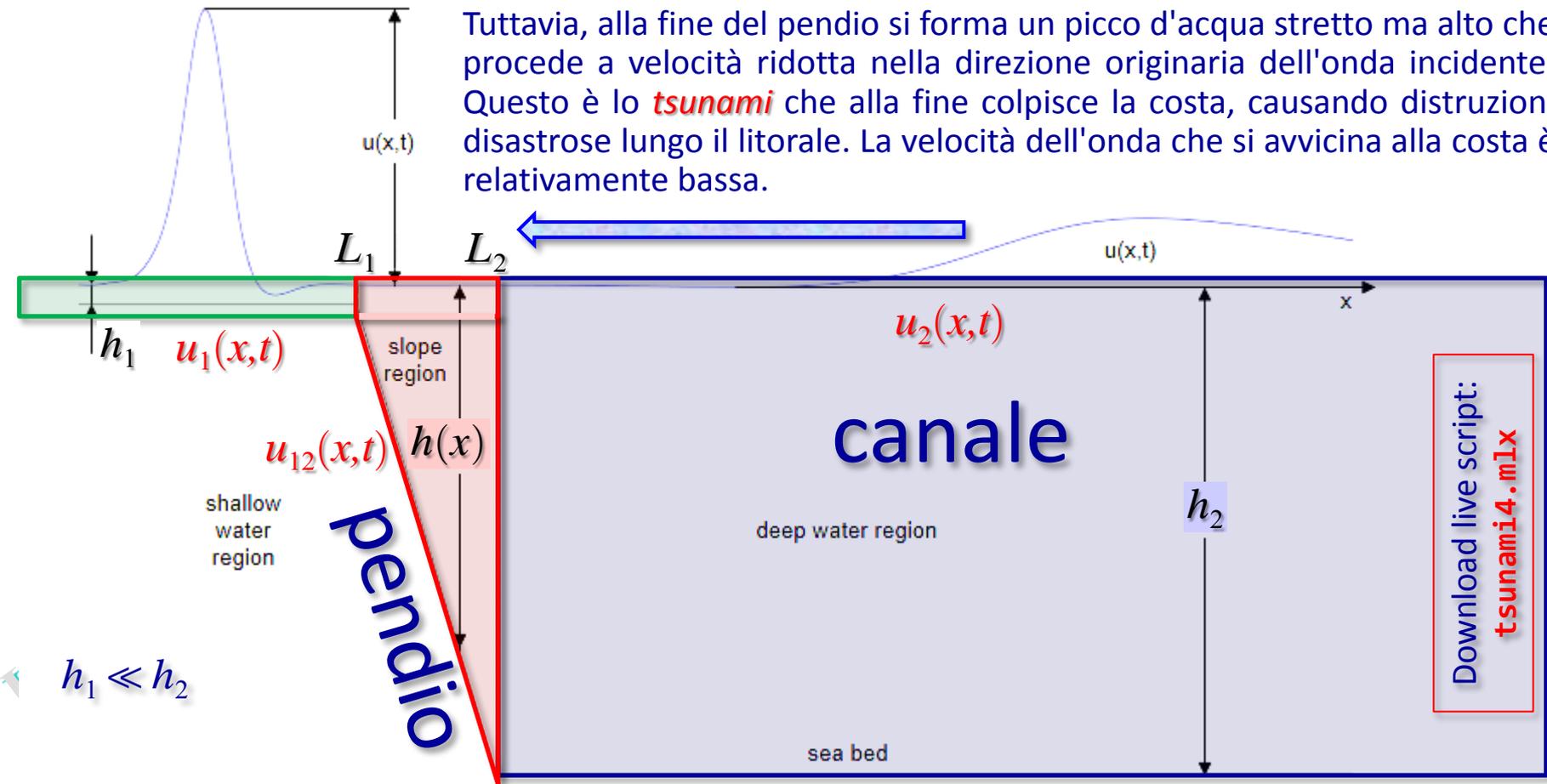
```
c=6; u_sx=@(x,t) c/2*sech( sqrt(c)/2*(x + c*t) ).^2;
syms xx tt real; syms u(x,t)
u(x,t)=u_sx(xx,tt);
simplify( diff(u,t,2) - c^2*diff(u,x,2) )
ans =
0
```

dove la **secante iperbolica** $\operatorname{sech}(x)$ è definita come: $\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)} = \frac{2}{e^{+x} + e^{-x}}$

Equazioni Differenziali Simboliche: esempi [4.2]

Un *solitone* viaggia, da destra verso sinistra, in un canale a profondità costante. All'estremità sinistra del canale è presente un *pendio* che simula la piattaforma continentale. Dopo aver raggiunto il pendio, il *solitone* inizia ad aumentare la sua altezza. Quando l'acqua diventa molto bassa, la maggior parte dell'onda viene riflessa nel canale.

Tuttavia, alla fine del pendio si forma un picco d'acqua stretto ma alto che procede a velocità ridotta nella direzione originaria dell'onda incidente. Questo è lo *tsunami* che alla fine colpisce la costa, causando distruzioni disastrose lungo il litorale. La velocità dell'onda che si avvicina alla costa è relativamente bassa.



Download live script:
tsunami4.mlx

Il dominio del problema è diviso in 3 parti: zona delle acque profonde, pendio e zona delle acque basse. Il problema è risolto in ogni sottodominio, imponendo alle soluzioni delle condizioni di regolarità nei punti di raccordo.

Anticipazione parte II: Trasformata di Fourier

Trasformata di Fourier (FT) $\mathcal{F}_t[f(t), \omega]$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i \nu t} dt$$

Antitrasformata di Fourier $\mathcal{F}_\omega^{-1}[F(\omega), t]$
o Trasformata Inversa di Fourier (IFT)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu) e^{2\pi i \nu t} d\nu$$

frequenza angolare ω

frequenza circolare ν

↑
radianti sec^{-1}

$$\omega = 2\pi\nu$$

↑ Hertz =
oscill. sec^{-1}

Laurea in
Applicazioni
di Matematica

Navigazione
di ACS

Proprietà della Trasformata di Fourier usate qui

Si consideri l'operatore che ad ogni funzione $f(x) \in L^1(-\infty, +\infty)$ (sommabile in \mathbb{R}) associa la sua *Trasformata di Fourier*

$$\mathcal{F}: f \longrightarrow \mathcal{F}[f, \omega] = F(\omega)$$

$$f(t) \bullet \text{---} \circ F(\omega)$$

- **Simmetria:** Se f è una funzione a valori reali, allora $F(\omega)$ è una funzione a valori complessi tale che:

$$F(\ominus\omega) = \overline{F(\omega)}$$

- **Time shifting:** alla traslazione nel tempo $t-h$ corrisponde una rotazione di un angolo $-h\omega$, cioè

$$f(t-h) \bullet \text{---} \circ e^{-i\omega h} F(\omega)$$

ed alla traslazione nel tempo $t+h$ corrisponde una rotazione di un angolo $+h\omega$, cioè

$$f(t+h) \bullet \text{---} \circ e^{+i\omega h} F(\omega)$$

- **Derivata di $f(t)$:** Se f è assolutamente continua e sommabile ed f' è sommabile, allora

$$\mathcal{F}[f'(t), \omega] = i\omega \mathcal{F}[f(t), \omega]$$

Più in generale, se f è assolutamente continua e sommabile con le prime $k-1$ derivate e $f^{(k)}$ è sommabile, allora

$$\mathcal{F}[f^{(k)}(t), \omega] = (i\omega)^k \mathcal{F}[f(t), \omega]$$

Anticipazione parte II: DFT e IDFT

Trasformata Discreta di Fourier e Trasformata Inversa

DEFINIZIONE: $\underline{\mathbf{F}} = \mathbf{DFT}(\underline{\mathbf{f}}) = \mathbf{\Omega}_N \cdot \underline{\mathbf{f}}$

forma matriciale

$$F_k = \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-\frac{2\pi i}{N}kj} = \sum_{j=0}^{N-1} f_j \omega_N^{kj}, \quad k=0,1,\dots,N-1$$

forma scalare

dove $\mathbf{\Omega}_N$ è la matrice quadrata $\mathbf{\Omega}_N = \left(\omega_N^{kj} \right)_{k,j=0,1,\dots,N-1}$ i cui elementi sono le potenze di $\omega_N = e^{-i\frac{2\pi}{N}}$

DEFINIZIONE: $\underline{\mathbf{F}} = \mathbf{IDFT}(\underline{\mathbf{f}}) = \mathbf{\Omega}_N^{-1} \cdot \underline{\mathbf{F}}$

forma matriciale

$$f_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{+\frac{2\pi i}{N}kj}, \quad j=0,1,\dots,N-1$$

forma scalare

dove $\mathbf{\Omega}_N^{-1}$ è data da:

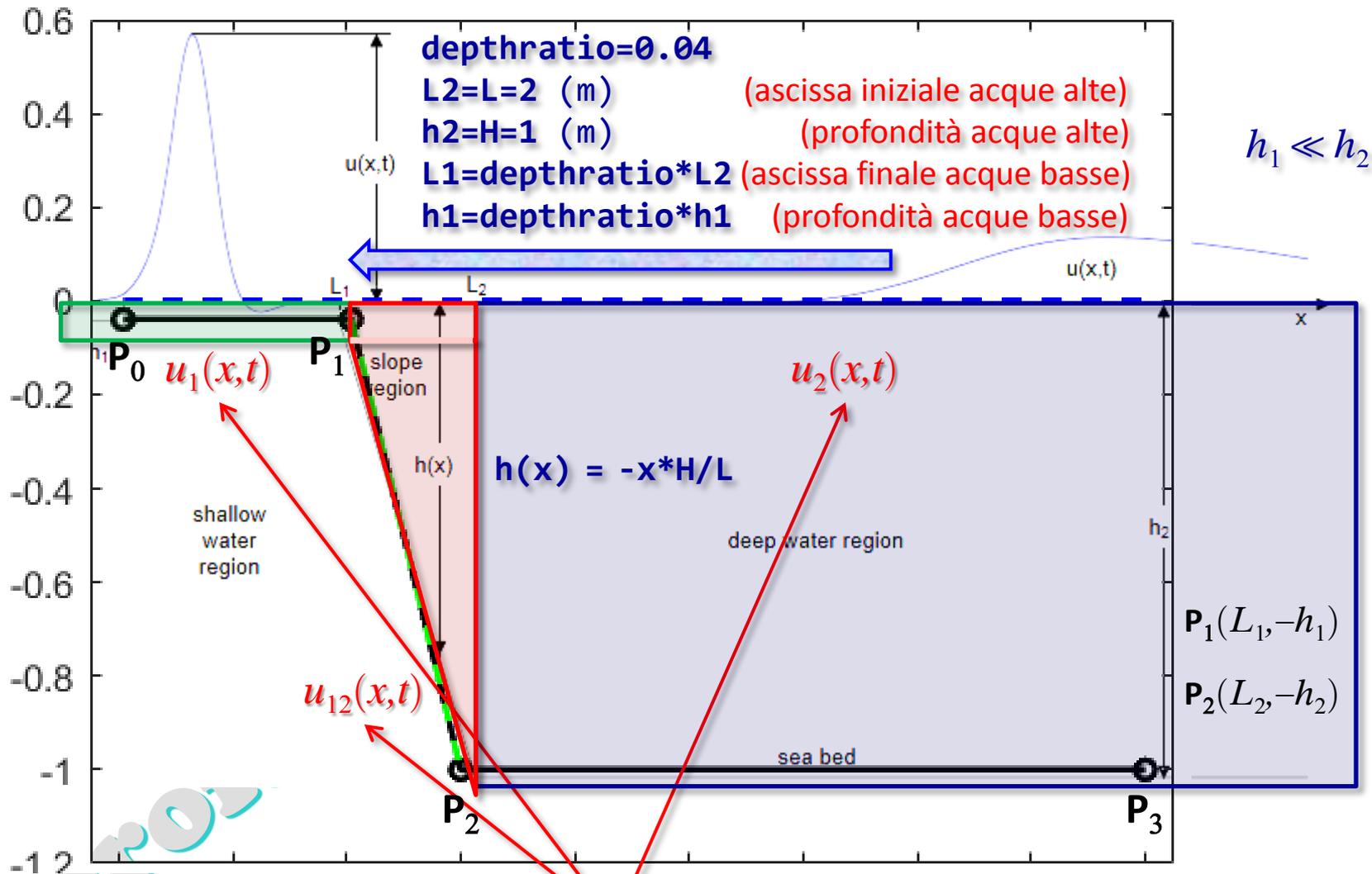
(semplice da calcolare) $\mathbf{\Omega}_N^{-1} = \frac{1}{N} (\mathbf{\Omega}_N)^H = \frac{1}{N} \bar{\mathbf{\Omega}}_N = \frac{1}{N} \left(\omega_N^{-kj} \right)_{k,j=0,1,\dots,N-1}$

matrice complessa coniugata (poiché $\mathbf{\Omega}_N$ è simmetrica)

La **DFT** è calcolata efficientemente dall'**algoritmo FFT** (Fast Fourier Transform) e la **IDFT** dall'**algoritmo IFFT**. Essa è lo strumento numerico per approssimare la Trasformata di Fourier.

Equazioni Differenziali Simboliche: esempi [4.3]

Dati numerici del dominio del problema



soluzioni in ciascun sottodominio

Generalità sulle onde monodimensionali

Per la *Teoria lineare non dispersiva* dell'acqua, l'ampiezza $u(x,t)$ di un'onda a superficie libera, al di sopra del livello dell'acqua, che si muove indisturbata in un canale unidimensionale di profondità variabile $h(x)$ è soluzione della seguente equazione differenziale:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = g \frac{\partial}{\partial x} \left[h(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \right], \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2 \quad \text{accelerazione di gravità}$$

La PDE è stata risolta (Kajiura 1961, Wong 1963, Dean 1964) per una singola onda incidente armonica, detta **onda monocromatica**, nella seguente forma:

$$u(x,t) = Ae^{i(kx \pm \omega t)} = Ae^{ikx} e^{\pm i\omega t} = \Phi(x, \omega) e^{\pm i\omega t}$$

separazione delle variabili

dove

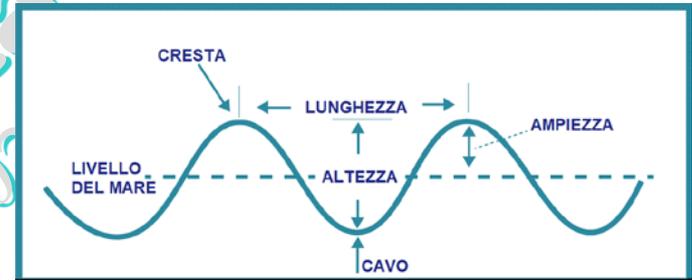
- A è l'**ampiezza** dell'onda;
- ω è la **frequenza angolare** (**frequenza temporale** o pulsazione) $\omega = 2\pi/P$ (P periodo);
- k è il **numero d'onda** (**frequenza spaziale** o numero di oscillazioni di un'onda nell'unità di lunghezza) $k = 2\pi/\lambda$ (λ lunghezza d'onda).

$$u(x+\lambda, t) = u(x, t),$$

$$u(x, t+P) = u(x, t)$$

Dalla *relazione generale di dispersione* per le acque poco profonde $\omega = \sqrt{gk \tanh(kh)}$, con h profondità media, si ha $\tanh(kh) \approx kh$, da cui, poiché si suppone che non ci sia dispersione, risulta $\omega = k\sqrt{gh}$: da qui la **velocità di fase** è data da

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{gh}$$



Per ottenere una soluzione della PDE $u_{tt} = g(hu_x)_x$, si considera una soluzione *steady state* (*onda stazionaria*), cioè del tipo (*a variabili separate*):

$$u(x,t) = \varphi(x) e^{\pm i\omega t}$$

$$u_1(x,t) = f(x) e^{+i\omega t} \Rightarrow u_2(x,t) = \overline{u_1(x,t)}$$

$$u_2(x,t) = f(x) e^{-i\omega t}$$

Sostituendo la $u(x,t)$ nella PDE, si ha la ODE: $g(h\varphi_x)_x + \omega^2\varphi = 0$

1

$$u(x,t) = \varphi(x) e^{-i\omega t} \Rightarrow u_t = -i\omega\varphi(x) e^{-i\omega t}, \quad u_{tt} = -\omega^2\varphi(x) e^{-i\omega t}$$

$$u_x = \varphi'(x) e^{-i\omega t}, \quad u_{xx} = \varphi''(x) e^{-i\omega t}$$

```
syms x t real; w=3;
phi=exp(-x^2);
fplot(phi,[-8 8]); xlabel('x')
```

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = g \frac{\partial}{\partial x} \left[h(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \right] \iff u_{tt} = gh'(x)u_x + gh(x)u_{xx}$$

$$-\omega^2\varphi(x) e^{-i\omega t} = g h(x)\varphi'(x) e^{-i\omega t} + g h(x)\varphi''(x) e^{-i\omega t}$$

ODE $gh(x)\varphi''(x) + gh'(x)\varphi'(x) + \omega^2\varphi(x) = 0$

2

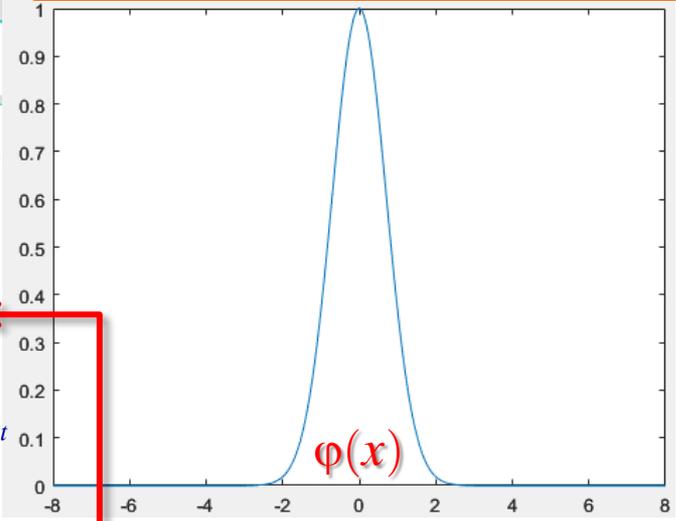
$$u(x,t) = \varphi(x) e^{+i\omega t} \Rightarrow u_t = +i\omega\varphi(x) e^{+i\omega t}, \quad u_{tt} = -\omega^2\varphi(x) e^{+i\omega t}$$

$$u_x = \varphi'(x) e^{+i\omega t}, \quad u_{xx} = \varphi''(x) e^{+i\omega t}$$

$$u_{tt} = gh'(x)u_x + gh(x)u_{xx}$$

$$-\omega^2\varphi(x) e^{+i\omega t} = g h(x)\varphi'(x) e^{+i\omega t} + g h(x)\varphi''(x) e^{+i\omega t}$$

ODE $gh(x)\varphi''(x) + gh'(x)\varphi'(x) + \omega^2\varphi(x) = 0$



stessa
ODE

Equazioni Differenziali Simboliche: esempi [4.4]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = g \frac{\partial}{\partial x} \left[h(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \right], \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

soluzione stazionaria

2

$$u(x,t) = \varphi(x) e^{+i\omega t}$$

dove $\varphi(x)$ è soluzione dell'ODE:

$$gh(x)\varphi''(x) + gh'(x)\varphi'(x) + \omega^2\varphi(x) = 0$$

$$u(x,t) = \varphi(x) e^{+i\omega t} \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) = u(x,t) e^{-i\omega t}$$

Per la linearità dell'ODE, si può considerare una **superposizione** di soluzioni; quindi risulta soluzione anche la seguente funzione:

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t) e^{-i\omega t} dt$$

ma tale integrale definisce proprio la **Trasformata di Fourier**, rispetto a t , di $u(x,t)$

Equazioni Differenziali Simboliche: esempi [4.5]

Sia $U=U(x,\omega)$ la **Trasformata di Fourier (FT)** di $u(x,t)$ rispetto a t per ogni fissato x , dove $u(x,t)$ è una soluzione dell'equazione delle onde (per es., il *solitone*):

$$U(x,\omega) = \mathcal{F}_t[u,\omega] = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t) e^{-i\omega t} dt$$

Per la proprietà sulla derivazione si ha che la **FT di u_{tt}** è:

$$\mathcal{F}_t[u_{tt},\omega] = (i\omega)^2 \mathcal{F}_t[u,\omega] = -\omega^2 \mathcal{F}_t[u,\omega] = -\omega^2 U(x,\omega)$$

mentre le **FT di u_x** e di u_{xx} , rispetto a t per ogni fissato x , sono:

$$\mathcal{F}_t\left[\frac{\partial u}{\partial x},\omega\right] = \frac{\partial U}{\partial x}(x,\omega) \Rightarrow \mathcal{F}_t\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\omega\right] = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,\omega)$$

1) Sul **pendio lineare** di profondità $h(x)$ che varia da una profondità costante h_2 ad un'altra costante h_1 (con $h_1 \ll h_2$) l'ampiezza dell'onda $u(x,t)$ è soluzione della PDE:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = g \frac{\partial}{\partial x} \left[h(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \right]$$

Se si passa alla **Trasformata di Fourier $U=U(x,\omega)$** di $u(x,t)$, per quanto detto prima, la **PDE** si trasforma nella seguente **ODE** (trascurando il parametro ω):

$$gh(x)U''(x) + \underbrace{gh'(x)}_{\text{costante}}U'(x) + \omega^2U(x) = 0$$

$$h'(x) = -H/L$$

Trascurando ω in $U(x,\omega)$, si cerca una nuova soluzione del tipo: $u(x,t) = U(x) e^{+i\omega t}$

Equazioni Differenziali Simboliche: esempi [4.6]

$$U(x, \omega) = \mathcal{F}_t[u, \omega] = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{-i\omega t} dt \quad \text{Trasformata di Fourier di } u$$

- 1) Sul **pendio** lineare di profondità $h(x)$ che varia da una profondità costante h_2 ad un'altra costante h_1 , con $h_1 \ll h_2$, si cerca una **soluzione della PDE** del tipo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = g \frac{\partial}{\partial x} \left[h(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right]$$

$$u(x, t) = U(x, \omega) e^{i\omega t}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i\omega U(x, \omega) e^{i\omega t}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\omega^2 U(x, \omega) e^{i\omega t}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial U(x, \omega)}{\partial x} e^{i\omega t}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U(x, \omega)}{\partial x^2} e^{i\omega t}$$

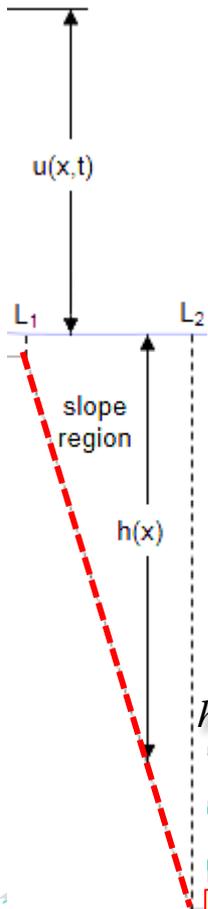
$$-\omega^2 U(x, \omega) e^{i\omega t} = g \left[h'(x) U'(x) + h(x) U''(x) \right] e^{i\omega t}$$

Risolvere la **PDE** equivale a risolvere la **ODE**

per ottenere la ODE eliminando l'esponenziale, basta considerare $t=0$

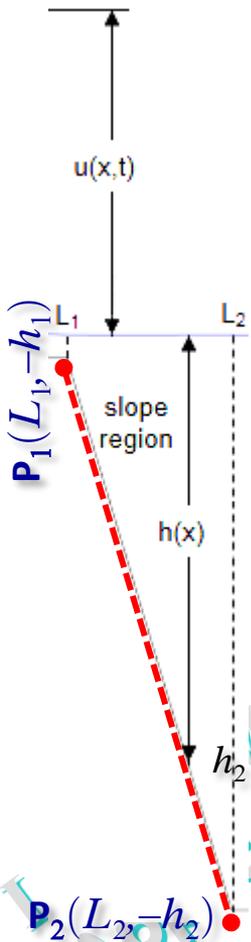
$$gh(x)U''(x) + gh'(x)U'(x) + \omega^2 U(x) = 0$$

costante



Equazioni Differenziali Simboliche: esempi [4.7]

- 1) Sul pendio lineare di profondità $h(x)$ che varia da una profondità costante h_2 ad un'altra costante h_1 , con $h_1 \ll h_2$: $h(x) = -x h_2 / L_2$



```
syms L H depthratio g positive
```

```
syms x t w symU(x)
```

```
L1=depthratio*L; % ascissa del punto di giunzione tra la regione delle acque basse ed il pendio
```

```
L2=L; % ascissa del punto di giunzione tra il pendio e la regione delle acque alte
```

```
h1=depthratio*H; % profondità della regione delle acque basse
```

```
h2=H; % profondità della regione delle acque alte
```

```
h(x) = -x*H/L;
```

```
u(x,t)=symU(x)*exp(1i*w*t); % soluzione della PDE
```

```
wavePDE(x,t) = diff(u,t,t) - g*diff(h(x)*diff(u,x),x);
```

```
U_ode(x) = wavePDE(x,0); % t=0 per eliminare exp(iωt)
```

```
U(x) = simplify(dsolve(U_ode)) % usa dsolve per risolvere l'ODE rispetto a U(x,ω)
```

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = g \frac{\partial}{\partial x} \left[h(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \right]$$

$U(x)$: espressione "complicata" contenente due costanti arbitrarie dipendenti da ω

$u(x) =$

$$C_1 J_0 \left(\frac{2 \sqrt{L} w \sqrt{x}}{\sqrt{H} \sqrt{g}} \right) + C_2 Y_0 \left(\frac{2 \sqrt{L} w \sqrt{x}}{\sqrt{H} \sqrt{g}} \right)$$

$$h(x) = x*H/L$$

J_0 è `besselj()`: funzione di Bessel di I^a specie; Y_0 è `bessely()`: funzione di Bessel di II^a specie.

$u(x) =$

$$C_1 I_0 \left(\frac{2 \sqrt{L} w \sqrt{x}}{\sqrt{H} \sqrt{g}} \right) + C_2 K_0 \left(\frac{2 \sqrt{L} w \sqrt{x}}{\sqrt{H} \sqrt{g}} \right)$$

$$h(x) = -x*H/L$$

I_0 è `besseli()`: funzione di Bessel modificata di I^a specie; K_0 è `besselk()`: funzione di Bessel modificata di II^a specie.

Le due costanti $C_1(\omega)$ e $C_2(\omega)$ saranno determinate in seguito mediante condizioni di continuità ai limiti L_1 e L_2

Download live script:
[tsunami4.mlx](#)

Equazioni Differenziali Simboliche: esempi [4.8]

2) Nelle regioni a profondità costante h la precedente PDE:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = g \frac{\partial}{\partial x} \left[h(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \right]$$

diventa:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = gh \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \Leftrightarrow u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad c = \sqrt{gh}$$

Essendo h costante, la **PDE** si trasforma nella **ODE** (trascurando il parametro ω):

$$-\omega^2 U(x, \omega) = c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x, \omega) \Leftrightarrow -\omega^2 U(x) = c^2 U''(x) \Leftrightarrow U'' + k^2 U = 0 \quad \text{Eq. delle onde stazionaria}$$

risolvendone l'**eq. caratteristica**

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm i \frac{\omega}{c} \Leftrightarrow U(x, \omega) = C_1(\omega) e^{-i \frac{\omega x}{c}} + C_2(\omega) e^{+i \frac{\omega x}{c}}$$

```
syms c x w U(x)
sol = simplify(dsolve(c^2*diff(U,x,x)+w^2*U))
sol =
U(x,omega) = C1*exp(-(w*x*1i)/c) + C2*exp((w*x*1i)/c)
```

Nelle regioni a profondità costante, si cerca ancora una **soluzione della PDE** del tipo

$$u(x,t) = U(x,\omega) e^{i\omega t}$$

cioè:

$$u(x,t) = U(x,\omega) e^{i\omega t} = C_1(\omega) e^{-i\omega \left(\frac{x}{c} - t\right)} + C_2(\omega) e^{+i\omega \left(\frac{x}{c} + t\right)}$$

Grafico delle funzioni:

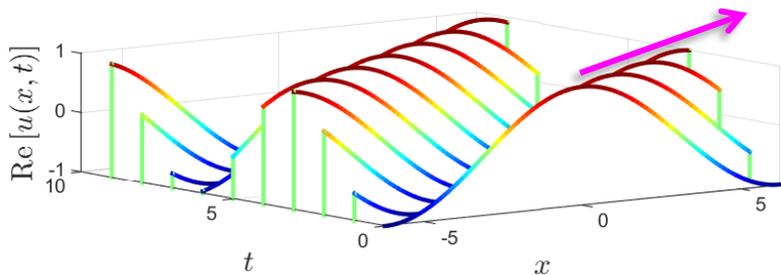
$$e^{i\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)} \quad e^{i\omega\left(t+\frac{x}{c}\right)}$$

$$e^{i\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)} = e^{-i\frac{\omega}{c}(x-ct)} \quad e^{i\omega\left(t+\frac{x}{c}\right)} = e^{+i\frac{\omega}{c}(x+ct)}$$

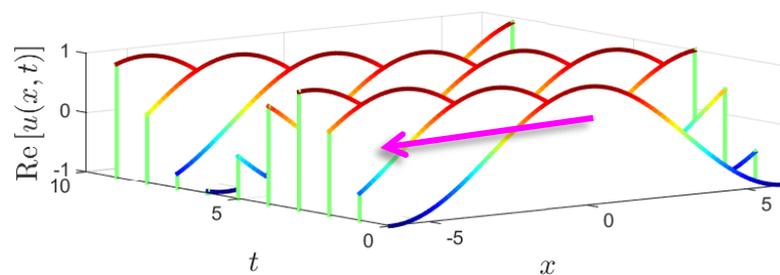
$k = \frac{\omega}{c}$ frequenza spaziale
 ω frequenza angolare temporale

```
w=1; c=2; f1=@(X,T) exp(1i*w*(T-X/c)); f2=@(X,T) exp(1i*w*(T+X/c));
[x,t]=meshgrid(linspace(-2*pi,2*pi,95),0:9); F1=f1(x,t); F2=f2(x,t);
figure(1)
subplot(2,1,1); waterfall(x,t,real(F1))
subplot(2,1,2); waterfall(x,t,imag(F1))
figure(2)
subplot(2,1,1); waterfall(x,t,real(F2))
subplot(2,1,2); waterfall(x,t,imag(F2))
```

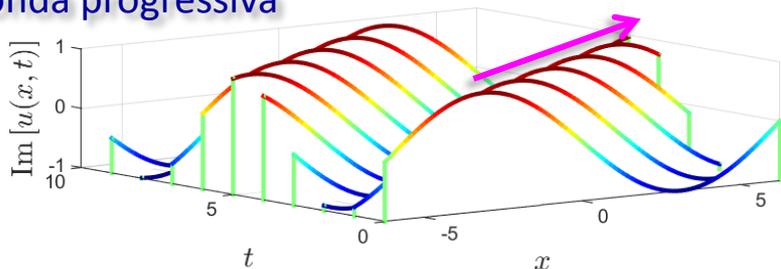
grafici di $u(x,t) = e^{i\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)}$, per $t = 0, \dots, 9$, $\omega = 1$ e $c = 2$



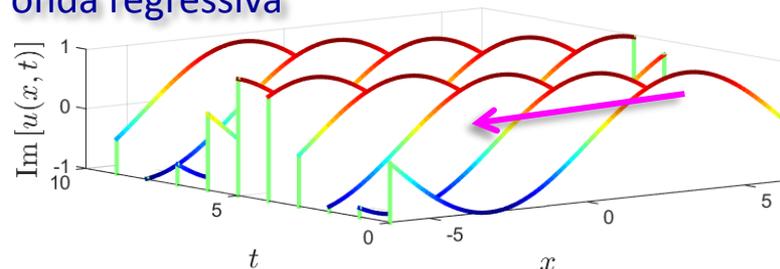
grafici di $u(x,t) = e^{i\omega\left(t+\frac{x}{c}\right)}$, per $t = 0, \dots, 9$, $\omega = 1$ e $c = 2$



onda progressiva



onda regressiva



Equazioni Differenziali Simboliche: esempi [4.9]

Nella Regione 2 (acque profonde) $u(x,t) = A_1 e^{-i\omega\left(\frac{x}{c_2}-t\right)} + A_2 e^{+i\omega\left(\frac{x}{c_2}+t\right)} = A_1 e^{-i\frac{\omega}{c_2}(x-c_2t)} + A_2 e^{+i\frac{\omega}{c_2}(x+c_2t)}$
 l'onda che viaggia verso sinistra è l'onda incidente che ha ampiezza nota A , quindi $A_2=A$:

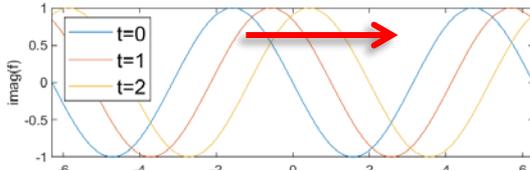
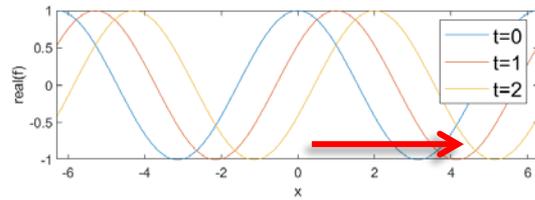
$$u(x,t) = A_1 e^{-i\omega\left(\frac{x}{c_2}-t\right)} + A e^{+i\omega\left(\frac{x}{c_2}+t\right)}$$

$c_2 = \sqrt{gh_2}$

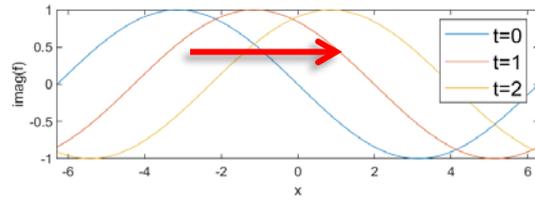
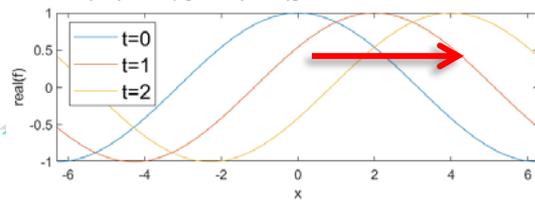
o. progressiva

o. regressiva

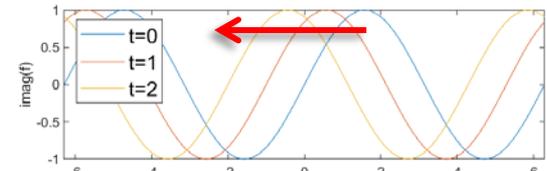
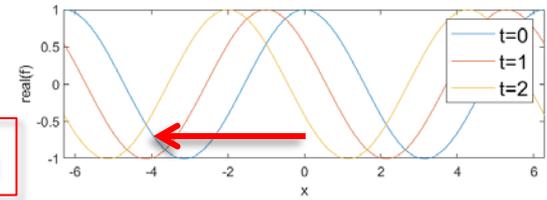
$f(x,t) = \exp[-i*w*(x/c-t)]$, $c=1$, $w=1$ e $t=0,1,2$



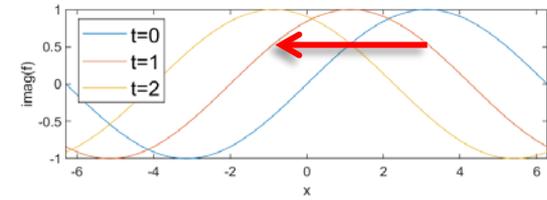
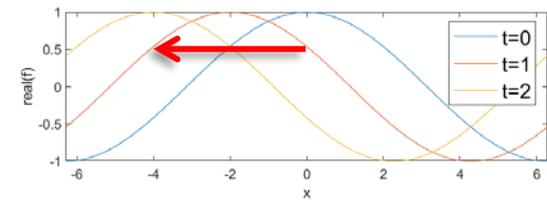
$f(x,t) = \exp[-i*w*(x/c-t)]$, $c=2$, $w=1$ e $t=0,1,2$



$f(x,t) = \exp[+i*w*(x/c+t)]$, $c=1$, $w=1$ e $t=0,1,2$



$f(x,t) = \exp[+i*w*(x/c+t)]$, $c=2$, $w=1$ e $t=0,1,2$



Equazioni Differenziali Simboliche: esempi [4.10]

Nella Regione 1 (acque basse)

si suppone che non ci sia nessuna onda che viaggi verso destra, quindi $B_1 = 0$.

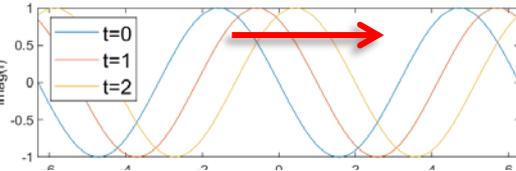
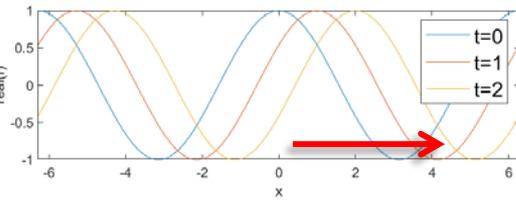
$$u(x,t) = B_1 e^{-i\omega\left(\frac{x}{c_1} - t\right)} + B_2 e^{+i\omega\left(\frac{x}{c_1} + t\right)} = B_1 e^{-i\frac{\omega}{c_1}(x - c_1 t)} + B_2 e^{+i\frac{\omega}{c_1}(x + c_1 t)}$$

$$u(x,t) = B_2 e^{+i\omega\left(\frac{x}{c_1} + t\right)}$$

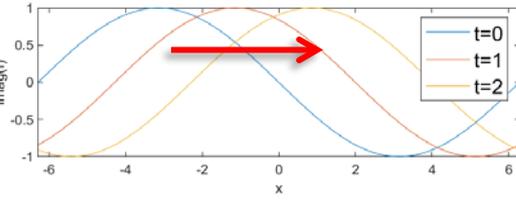
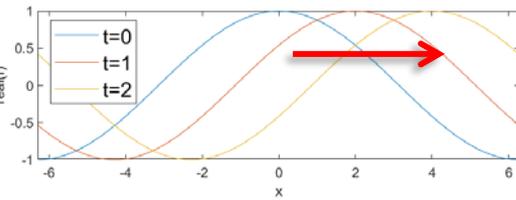
$$c_1 = \sqrt{gh_1}$$

o regressiva

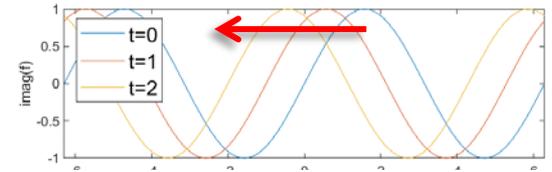
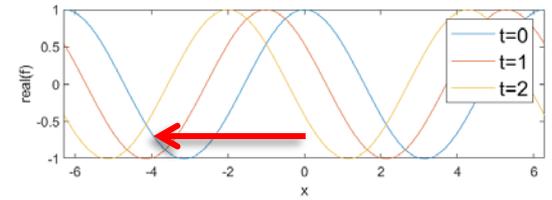
$f(x,t) = \exp[-i*w*(x/c-t)]$, $c=1$, $w=1$ e $t=0,1,2$



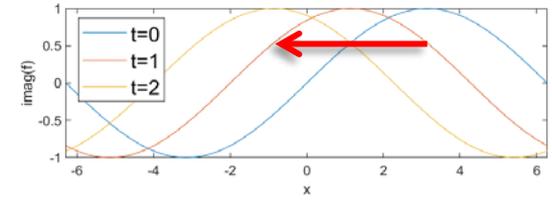
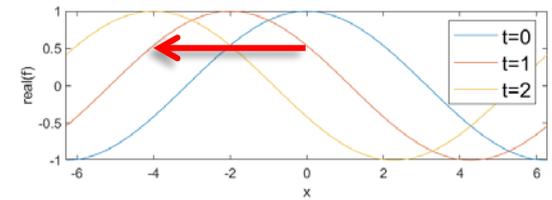
$f(x,t) = \exp[-i*w*(x/c-t)]$, $c=2$, $w=1$ e $t=0,1,2$



$f(x,t) = \exp[+i*w*(x/c+t)]$, $c=1$, $w=1$ e $t=0,1,2$



$f(x,t) = \exp[+i*w*(x/c+t)]$, $c=2$, $w=1$ e $t=0,1,2$



Equazioni Differenziali Simboliche: esempi [4.11]

Se $S(x, \omega)$ rappresenta la Trasformata di Fourier del solitone mobile s che si muove nel canale da destra verso sinistra (onda incidente):

$$s(x, t) = \frac{c_2}{2} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\sqrt{c_2}}{2} (x + c_2 t) \right]$$

e $U(x, \omega)$ è la Trasformata di Fourier della soluzione *steady state* della PDE:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = g \frac{\partial}{\partial x} \left[h(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right]$$

allora:

1) Sul pendio lineare di profondità $h(x) = -x h_2 / L_2$, si cerca una soluzione del tipo:

$$u_{12}(x, t) = \mathcal{F}_\omega^{-1} [S(x, \omega) U(x, \omega)]$$

2.1) Nella **regione delle acque poco profonde**, a profondità costante h_1 , si cerca una soluzione del tipo:

$$u_1(x, t) = \mathcal{F}_\omega^{-1} \left[S(x, \omega) T(\omega) e^{+i\omega \frac{x}{c_1}} \right]$$

cioè un'onda trasmessa che si muove verso sinistra con velocità costante $c_1 = \sqrt{gh_1}$ e con un'ampiezza data dal coefficiente di trasmissione $T(\omega)$ dipendente dalla frequenza.

Equazioni Differenziali Simboliche: esempi [4.12]

2.2) Nella **regione delle acque profonde**, a profondità costante h_2 si cerca una soluzione del tipo:

$$u_2(x, t) = \mathcal{F}_\omega^{-1} \left\{ S(x, \omega) \left[R(\omega) e^{-i\omega \frac{x}{c_2}} + e^{+i\omega \frac{x}{c_2}} \right] \right\}$$

cioè la sovrapposizione di due onde:

- un'onda che si muove verso sinistra con velocità costante $c_2 = \sqrt{gh_2}$ (il solitone)
- un'onda riflessa che si muove verso destra con un'ampiezza data dal coefficiente di riflessione $R(\omega)$ dipendente dalla frequenza.

Le quantità $T(\omega)$ e $R(\omega)$, così come le due costanti $C_1(\omega)$ e $C_2(\omega)$ in $U(x, \omega)$, saranno determinate mediante condizioni di continuità ai limiti L_1 e L_2

Equazioni Differenziali Simboliche: esempi [4.13]

 $u(x) =$

$$C_1 I_0\left(\frac{2 \sqrt{L} w \sqrt{x}}{\sqrt{H} \sqrt{g}}\right) + C_2 K_0\left(\frac{2 \sqrt{L} w \sqrt{x}}{\sqrt{H} \sqrt{g}}\right)$$

 $h(x) = -x*H/L$ $u(x) =$

$$C_1 J_0\left(\frac{2 \sqrt{L} w \sqrt{x}}{\sqrt{H} \sqrt{g}}\right) + C_2 Y_0\left(\frac{2 \sqrt{L} w \sqrt{x}}{\sqrt{H} \sqrt{g}}\right)$$

 $h(x) = x*H/L$

La soluzione $U(x)$ è un'espressione complicata involvente le *funzioni di Bessel* J_0 e Y_0 oppure I_0 e K_0 . Essa contiene due "costanti" arbitrarie C_1 e C_2 dipendenti da ω .

Per estrarre tutte le variabili simboliche dall'espressione di $U(x)$ usa la funzione **symvar()**:

```
A=symvar(U)
```

```
A =  
[x, C1, C2, H, L, g, w]
```

Poi crea un vettore simbolico contenente le variabili simboliche diverse da C_1 e C_2 , mediante:

```
B=sym([g,H,L,x,w])
```

```
B =  
[x, H, L, g, w]
```

Infine, per estrarre le variabili simboliche C_1 e C_2 usa la funzione **setdiff()** che da tutte le variabili simboliche in **A** elimina quelle in **B**:

```
Const=setdiff(A,B)
```

```
Const =  
[C1, C2]
```

Download live script:
[tsunami4.mlx](#)

Equazioni Differenziali Simboliche: esempi [4.14]

La soluzione complessiva deve essere una funzione differenziabile con continuità rispetto ad x .

Quindi, i valori delle funzioni $u(x,t)$, $u_1(x,t)$, e $u_2(x,t)$, e delle loro derivate devono corrispondersi nei punti di giunzione L_1 e L_2 ; ciò fornisce quattro equazioni lineari nelle incognite $T(\omega)$, $R(\omega)$, e nelle due costanti $C_1(\omega)$ e $C_2(\omega)$ di U .

$R(\omega)$ rappresenta il **coefficiente di riflessione** ed è usato nell'onda riflessa.

$T(\omega)$ rappresenta il **coefficiente di trasmissione** ed è usato nell'onda trasmessa.

Costruisce il sistema di equazioni:

```
du1(x) = diff(u1(x,0),x);  
du2(x) = diff(u2(x,0),x);  
dU(x) = diff(symU(x),x);
```

```
% condizioni di regolarità per t=0 (per eliminare exp(1i*w*t) nella ODE) nei punti di giunzione L1 e L2  
eqs = [ symU(L1) == u1(L1,0), symU(L2) == u2(L2,0), ...  
        dU(L1) == du1(L1), dU(L2) == du2(L2)];  
unknowns = [Const(1),Const(2),symR,symT];
```

condizioni di continuità
nei punti di raccordo

Risolve simbolicamente queste quattro equazioni:

```
[Cvalue1, Cvalue2, symR, symT] = solve(eqs, unknowns);
```

Sostituisce le due costanti C_1 e C_2 in U :

```
symU(x) = subs(symU(x), {Const(1),Const(2)}, {Cvalue1,Cvalue2});
```

Equazioni Differenziali Simboliche: esempi [4.15]

Non si possono calcolare, per $\omega=0$, $U(0)$, $R(0)$ e $T(0)$ (il risultato è NaN):

```
disp(subs(symU(x),w,0))
```

NaN

```
disp(subs(symR,w,0))
```

NaN

```
disp(subs(symT,w,0))
```

NaN

ma si possono calcolare i loro limiti per $\omega \rightarrow 0$: U_{x0} , R_0 , T_0 :

```
Ux0 = simplify(limit(symU(x), w, 0));  
R0 = simplify(limit(symR, w, 0));  
T0 = simplify(limit(symT, w, 0));  
Ux0, R0, T0
```

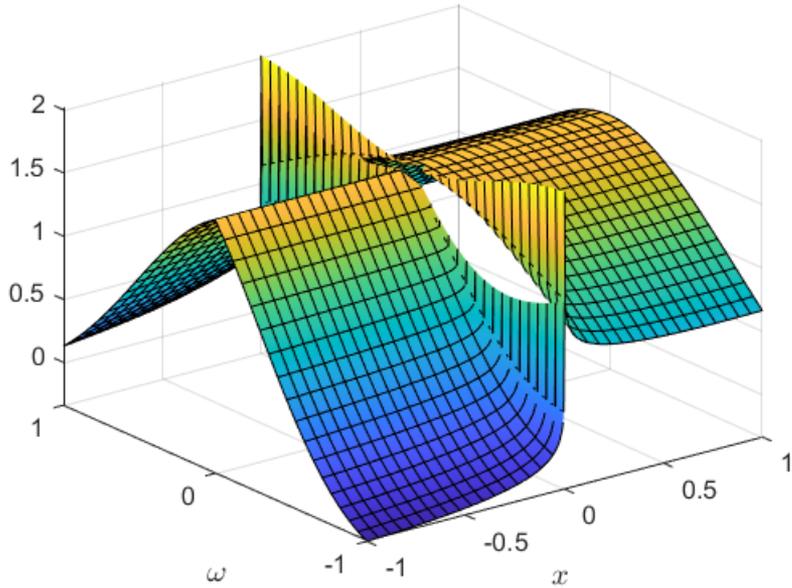
$$U_{x0} = \frac{2}{\sqrt{\text{depthratio} + 1}}$$
$$R_0 = \frac{\sqrt{\text{depthratio}} - 1}{\sqrt{\text{depthratio} + 1}}$$
$$T_0 = \frac{2}{\sqrt{\text{depthratio} + 1}}$$

Questi limiti sono straordinariamente semplici: dipendono solo dal rapporto tra i valori di profondità che definiscono la pendenza: $\text{depthratio} = h_1/h_2$;

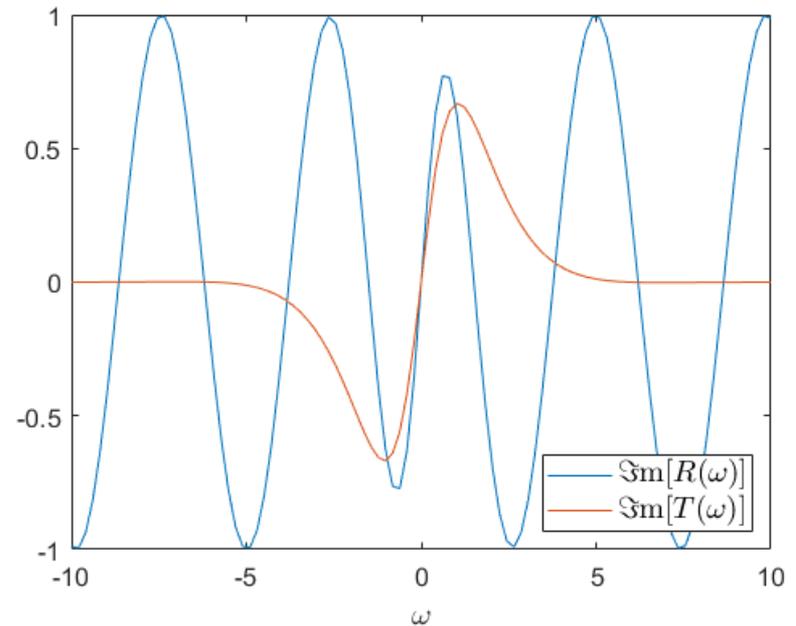
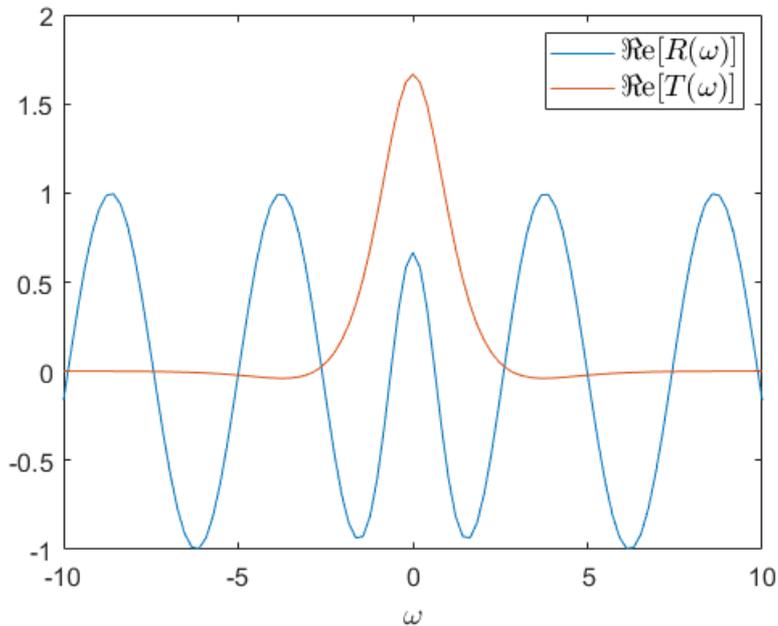
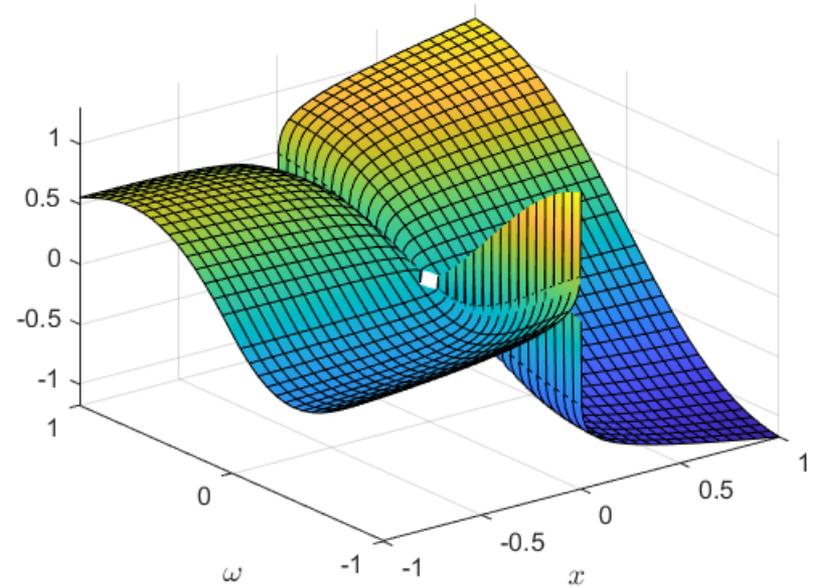
Download live script:
[tsunami4.mlx](#)

Grafici di $R(\omega)$, $T(\omega)$, $U(x, \omega)$

$\Re[U(x, \omega)]$



$\Im m[U(x, \omega)]$



Equazioni Differenziali Simboliche: esempi [4.16]

L'espressione di U è così complicata che non si può usare la funzione `ifourier()` per invertire U simbolicamente e trovare la soluzione della PDE

```
%% NON FUNZIONA ifourier() !!!
```

```
Uxw=subs(symU,{L,H,g,depthratio},{2,1,9.81,0.04})
```

$U_{xw}(x) =$

$$-\frac{2(5\sigma_1 K_0(\sigma_4) - 5\sigma_1 K_1(\sigma_4) i) I_0\left(\frac{20\sqrt{2}\sqrt{981} w \sqrt{x}}{981}\right)}{\sigma_2} + \frac{2\sigma_1(5I_0(\sigma_4) + 5I_1(\sigma_4) i) K_0\left(\frac{20\sqrt{2}\sqrt{981} w \sqrt{x}}{981}\right)}{\sigma_2}$$

where

$$\sigma_1 = e^{\frac{20\sqrt{981} w i}{981}}$$

$$\sigma_2 = 5I_0(\sigma_4)K_0(\sigma_3) - 5K_0(\sigma_4)I_0(\sigma_3) - 5I_1(\sigma_4)K_1(\sigma_3) + 5K_1(\sigma_4)I_1(\sigma_3) + 5I_0(\sigma_4)K_1(\sigma_3) i + 5I_1(\sigma_4)K_0(\sigma_3) i + 5K_0(\sigma_4)I_1(\sigma_3) i + 5K_1(\sigma_4)I_0(\sigma_3) i$$

$$\sigma_3 = \frac{40\sqrt{981} w}{981}$$

$$\sigma_4 = \frac{8\sqrt{981} w}{981}$$

```
uxt=simplify(ifourier(Uxw,w,t),100)
```

$u_{xt}(x) =$

$$-\frac{\text{fourier}\left(\frac{\sigma_3 K_0(\sigma_6)}{\sigma_4}, w, \sigma_1\right)}{\pi} + \frac{\text{fourier}\left(\frac{\sigma_2 I_0(\sigma_6)}{\sigma_4}, w, \sigma_1\right)}{\pi} + \frac{\text{fourier}\left(\frac{\sigma_3 K_1(\sigma_6)}{\sigma_4}, w, \sigma_1\right) i}{\pi} + \frac{\text{fourier}\left(\frac{\sigma_2 I_1(\sigma_6)}{\sigma_4}, w, \sigma_1\right) i}{\pi}$$

Bisogna risolvere il problema in modo misto: simbolico/numerico.

Download live script:
tsunami4.mlx

Equazioni Differenziali Simboliche: esempi [4.17]

Risoluzione numerica

Si discretizzano i tre sottodomini del dominio spaziale e l'intervallo temporale.

Si calcolano, in funzione di t e per un x^* fissato, dei campioni s_j del solitone in arrivo da destra nel canale.

$$\text{solitone}(x, t) = \frac{c_2}{2} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\sqrt{c_2}}{2} (x + c_2 t) \right]$$

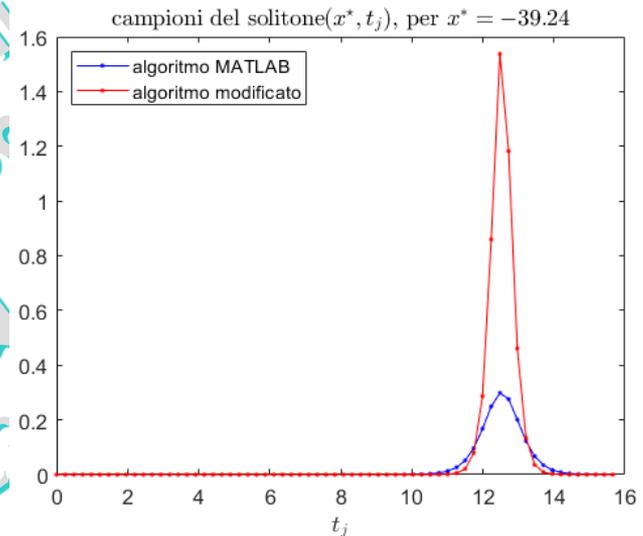
Poi si calcola l'approssimazione numerica S_j della Trasformata di Fourier dei campioni s_j del solitone (mediante la FFT).

I campioni S_j rappresentano la FT $S(x, \omega)$, rispetto al tempo, del solitone (1 sola onda).

Viene generata la FT di un'onda mobile moltiplicando S_j per $e^{i\omega x/c_2}$ e poi calcolandone la *Trasformata Inversa di Fourier*.

A partire dai campioni di $S(x, \omega)$, si costruiscono le 3 Trasformate di Fourier per ciascun sottodominio.

Infine le 3 Trasformate di Fourier vengono invertite numericamente per ottenere la soluzione del problema.



Download live script:

[tsunami4.mlx](#)