Prof. Mariacarla Staffa
a.a. 2022/2023

Laboratorio di Architettura Degli Elaboratori

Algebra di Boole e reti combinatorie

Algebra di Boole

- Come abbiamo visto la medesima funzione può essere descritta da espressioni booleane distinte
- Alcune di queste possono essere più semplici di altre

A	B	Y	minterm	minterm name
0	0	0	$\bar{A}\,\bar{B}$	m_0
0	1	1	$\bar{A}\,B$	m_1
1	0	0	$A\,\bar{B}$	m_2
1	1	1	$A\,B$	m_3

Y= $\bar{A}B + AB$
Y= $(A + B) \cdot (\bar{A} + B)$
Y= B

- Come si fa con l'aritmetica, possiamo utilizzare un algebra per semplificare le espressioni

$$\frac{1}{x}(x + xy) \Rightarrow \frac{x}{x}(1 + y) \Rightarrow (1 + y)$$

Boolean Axioms

Dual: Replace: • with + 0 with 1

Number	Axiom	Dual	Name
A1	$B = 0$ if $B \neq 1$	$B = 1$ if $B \neq 0$	Binary Field
A2	$\overline{0} = 1$	$\overline{1} = 0$	NOT
A3	$0 \bullet 0 = 0$	$1 + 1 = 1$	AND/OR
A4	$1 \bullet 1 = 1$	$0 + 0 = 0$	AND/OR
A5	$0 \bullet 1 = 1 \bullet 0 = 0$	$1 + 0 = 0 + 1 = 1$	AND/OR

- A1 e A1′ ci dicono che il valore di una variabile booleana può essere 0 oppure 1
- A2 e A2′ definiscono l'operatore NOT (di fatto questi assiomi ripropongono la tabella di verità dell'operatore)
- A3, A4 e A5 definiscono l'operatore AND
- A3′, A4′ e A5′ definiscono l'operatore OR

Notate che ogni assioma «primato» si ottiene dal corrispondente non primato invertendo, da un lato, OR e AND e dall'altro gli 0 e 1. Questo è un principio generale detto principio di dualità.

Teoremi ad una variabile

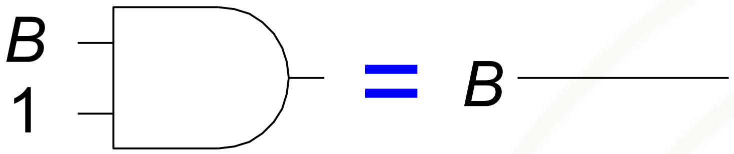
	Theorem		Dual	Name
T1	$B \bullet 1 = B$	T1′	$B + 0 = B$	Identity
T2	$B \bullet 0 = 0$	T2′	$B + 1 = 1$	Null Element
T3	$B \bullet B = B$	T3′	$B + B = B$	Idempotency
T4		$\overline{\overline{B}} = B$		Involution
T5	$B \bullet \overline{B} = 0$	T5′	$B + \overline{B} = 1$	Complements

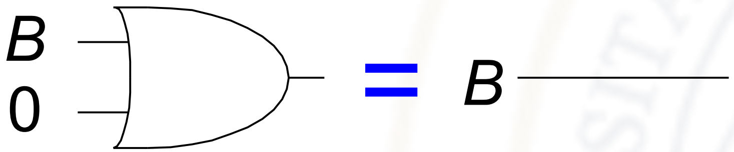
Teorema B·1=B
Dimostrazione:
- Supponiamo B=1, allora B·1=1·1=1=B
- Supponiamo B=0, allora B·1=0·1=0=B

Teorema $B + \bar{B}$=1
Dimostrazione:
- Supponiamo B=1, allora $B + \bar{B}$=1+0=1
- Supponiamo B=0, allora $B + \bar{B}$=0+1=1

T1: Identity Theorem

- $B \cdot 1 = B$
- $B + 0 = B$

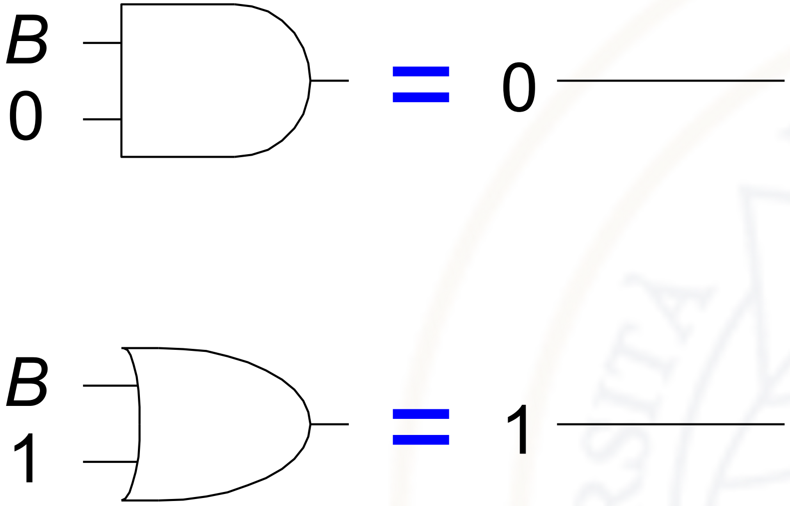




- Gates cost money , power and delay so replacing a gate with a wire is beneficial

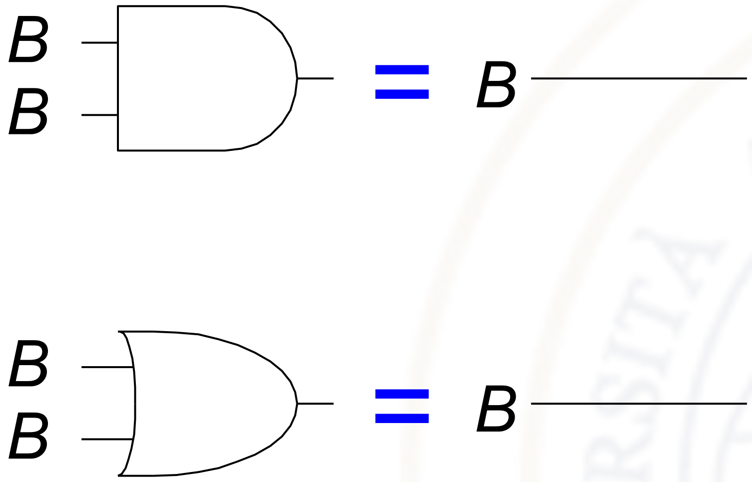
T2: Null Element Theorem

- $B \cdot 0 = 0$
- $B + 1 = 1$



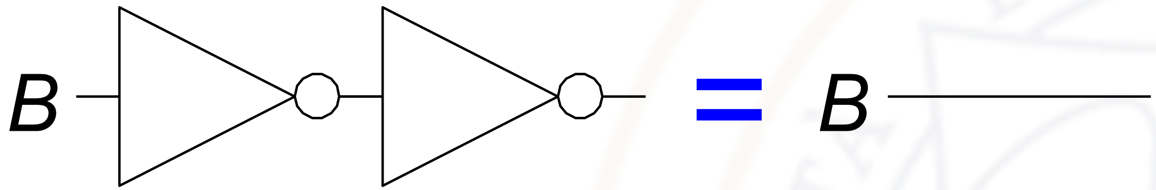
T3: Idempotency Theorem

- $B \cdot B = B$
- $B + B = B$



T4: Involution Theorem

- $\overline{\overline{\mathrm{B}}} = \mathrm{B}$



T5: Complement Theorem

- $B \cdot \overline{B} = 0$
- $B + \overline{B} = 1$