Prof. Mariacarla Staffa
a.a. 2022/2023

Laboratorio di Architettura Degli Elaboratori

Algebra di Boole e reti combinatorie

Tabella di verità e espressioni booleane

- Le specifiche funzionali di un circuito combinatorio sono descritte tramite tabelle di verità o espressioni booleane
- In generale, più espressioni booleane corrispondo alla stessa tabella di verità
  - Per esempio abbiamo visto che $\overline{A\bar{B}}$ e $\bar{A} + B$ corrispondono alla stessa tabella di verità, ovvero $\overline{A\bar{B}} = \bar{A} + B$.
- Come si ricava la tabella di verità di una data espressione?
- Viceversa, a partire da una tabella di verità, come si ricava una espressione corrispondente?

Dalle espressioni alle tabelle

- Il calcolo di una tabella di verità a partire una espressione booleana non è dissimile concettualmente dal calcolo di una espressione aritmetica. Si calcolano a ritroso le tabelle di verità delle sue sotto-espressioni.
- Consideriamo l'espressione $(\bar{A}B)+(B \oplus C)$

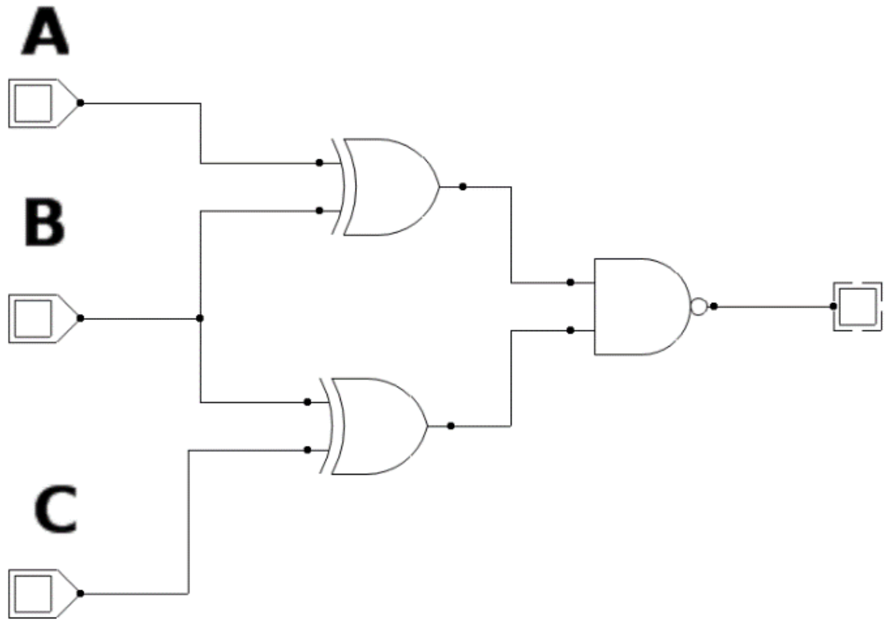
Dalle espressioni alle tabelle

- Il calcolo di una tabella di verità a partire una espressione booleana non è dissimile concettualmente dal calcolo di una espressione aritmetica. Si calcolano a ritroso le tabelle di verità delle sue sotto espressioni.
- Consideriamo l'espressione $(\bar{A}B)+(B\oplus C)$

A B C	$\bar{A}$	$\bar{A}\cdot B$	$B\oplus C$	$(\bar{A}B)+(B\oplus C)$
0 0 0	1	0	0	0
0 0 1	1	0	1	1
0 1 0	1	1	1	1
0 1 1	1	1	0	1
1 0 0	0	0	0	0
1 0 1	0	0	1	1
1 1 0	0	0	1	1
1 1 1	0	0	0	0

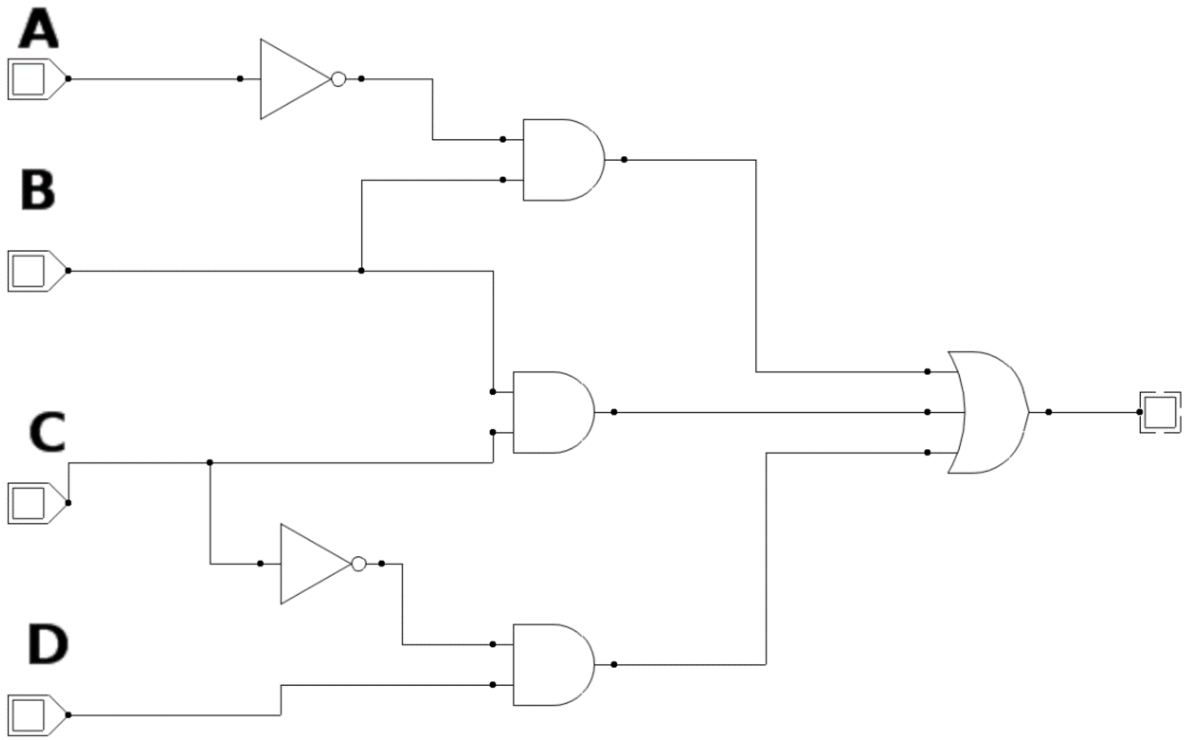
Esercizi

- Dimostrare che $(A \cdot \overline{B}) + (\overline{A} \cdot B)$ è equivalente alla porta XOR calcolandone la tabella di verità
- Scrivere l'espressione booleana e la relativa tabella di verità della rete:



Esercizi

- Scrivere l'espressione booleana e la relativa tabella di verità della rete:



Ricavare da una tabella di verità un espressione booleana

- Definizioni preliminari:
  - Una variabile booleana A o la sua negata $\bar{A}$ sono detti litterali
  - Una variabile negata in particolare è detta complemento
  - Un prodotto (AND) di litterali è detto implicante: $\bar{A}$B , $\overline{A}$B$\bar{C}$, B sono tutti implicanti per una funzione booleana di almeno 3 variabili.
  - Dato un insieme K di variabili booleane, un mintermine di K è un implicante che comprende (positive o negate) tutte le variabili in K .
    - Ad esempio, se $\mathrm{K} = \{A, B, C\}$ allora $\overline{A}$B$\bar{C}$ è un mintermine per K. Invece, $\bar{A}$B è un implicante ma non un mintermine.
  - Analogamente, un maxtermine di K è una somma di litterali in cui occorrono tutte le variabili in K.
    - Ad esempio $\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$ è un maxtermine di $\mathrm{K} = \{A, B, C\}$.
  - ordine di precedenza NOT →AND→OR
    - $\overline{A}\mathrm{B}\bar{C} + \mathrm{CB} = (\overline{A}\mathrm{B}\bar{C}) + (\mathrm{CB})$

Some Definitions

- **Complement**: variable with a bar over it
  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$
- **Literal**: variable or its complement
  $A, \bar{A}, B, \bar{B}, C, \bar{C}$
- **Implicant**: product of literals
  $AB\bar{C}, \bar{A}C, BC$
- **Minterm**: product that includes all input variables
  $AB\bar{C}, A\bar{B}\bar{C}, ABC$
- **Maxterm**: sum that includes all input variables
  $(A+\bar{B}+C), (\bar{A}+B+\bar{C}), (\bar{A}+\bar{B}+C)$

La forma SOP (Sum-Of-Products)

- Forma sintattica ben precisa: SOP
- Ognuna delle 2^N righe di una tabella di verità è caratterizzata da un mintermine

A B	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0 0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Y=AB Y=$A\bar{B}$ Y=$\bar{A}B$ Y= $\bar{A}\bar{B}$

La forma SOP

- I mintermini sono enumerati rigo dopo rigo a partire da 0,1, 2.. e così via. Quindi ogni mintermine è denotato dal numero binario della configurazione di input corrispondente.

A	B	Y	minterm	minterm name
0	0	0	$\overline{A}\ \overline{B}$	m_0
0	1	1	$\overline{A}\ B$	m_1
1	0	0	$A\ \overline{B}$	m_2
1	1	0	$A\ B$	m_3

La forma SOP

- Quindi ad ogni tabella di verità corrisponde una espressione booleana ottenuta sommando tutti i mintermini per cui il valore dell'output Y è pari a 1

A	B	Y	minterm	minterm name
0	0	0	$\bar{A}\ \bar{B}$	m_0
0	1	1	$\bar{A}\ B$	m_1
1	0	0	$A\ \bar{B}$	m_2
1	1	1	$A\ B$	m_3

Y= $\bar{A}$B + AB

Y= $\Sigma(1,3)$

La forma SOP

- Consideriamo un esempio a tre variabili
- Dobbiamo sommare tutti i mintermini per cui il valore dell'output Y=1

A	B	C	Y
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

La forma SOP

- Consideriamo un esempio a tre variabili

A	B	C	Y
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Y= $\bar{A}\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C$

Y= $\Sigma(0,4,5)$

La forma POS (Product-of-Sums)

- Una forma duale per rappresentare una funzione booleana è in forma POS (prodotto di somme).
- Ad ogni riga di una tabella di verità corrisponde un maxtermine che è uguale a 0 solo per quella riga

A B	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0 0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Y=$A+B$

Y=$A+\bar{B}$

Y=$\bar{A}+$B

Y= $\bar{A}+\bar{B}$

La forma POS

- Anche i maxtermini sono enumerati come i mintermini.

A	B	Y	maxterm	maxterm name
0	0	0	$A + B$	M_0
0	1	1	$A + \overline{B}$	M_1
1	0	0	$\overline{A} + B$	M_2
1	1	1	$\overline{A} + \overline{B}$	M_3

- La forma normale POS di una funzione booleana si ottiene come prodotto dei maxtermini per cui la funzione ritorna 0
  - $Y=(A + B) \cdot (\bar{A} + B)$
  - $Y=\prod(0,2)$

La forma POS

- Y=$(A + B) \cdot (\bar{A} + B)$

A B	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0 0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Y=$(A + B) \cdot (\bar{A} + B)$ Y=$A + B$ Y=$\bar{A} + B$

Boolean Equations Example

- You are going to the cafeteria for lunch

  You won't eat lunch ($\overline{E}$)

  – If it's not open ($\overline{O}$)

  OR

  – If they only serve corndogs (C)
- Write a truth table for determining if you will eat lunch (E).

O	C	E
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

Boolean Equations Example

- You are going to the cafeteria for lunch

  You won't eat lunch ($\overline{E}$)

  - If it's not open ($\overline{O}$)

    OR

  - If they only serve corndogs (C)

- Write a truth table for determining if you will eat lunch (E).

O	C	E
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

SOP & POS Form

SOP – sum-of-products

O	C	E	minterm
0	0		$\overline{O}\ \overline{C}$
0	1		$\overline{O}\ C$
1	0		$O\ \overline{C}$
1	1		$O\ C$

POS – product-of-sums

O	C	E	maxterm
0	0		$O + C$
0	1		$O + \overline{C}$
1	0		$\overline{O} + C$
1	1		$\overline{O} + \overline{C}$

SOP & POS Form

SOP – sum-of-products

O	C	E	minterm
0	0	0	$\overline{O}\,\overline{C}$
0	1	0	$\overline{O}\,C$
1	0	1	$O\,\overline{C}$
1	1	0	$O\,C$

$$E = O\overline{C}$$
$$= \Sigma(2)$$

POS – product-of-sums

O	C	E	maxterm
0	0	0	$O + C$
0	1	0	$O + \overline{C}$
1	0	1	$\overline{O} + C$
1	1	0	$\overline{O} + \overline{C}$

$$E = (O + C)(O + \overline{C})(\overline{O} + \overline{C})$$
$$= \Pi(0, 1, 3)$$

Forme SOP & POS

Se la tabella di verità ha pochi 1 allora la forma SOP è più succinta della forma POS

Se la tabella di verità ha pochi 0 allora la forma POS è più succinta della forma SOP

Nel caso in cui il numero di 0 e 1 è pressappoco lo stesso le due forme si equivalgono

Algebra di Boole

- Come abbiamo visto la medesima funzione può essere descritta da espressioni booleane distinte
- Alcune di queste possono essere più semplici di altre

A	B	Y	minterm	minterm name
0	0	0	$\bar{A}\ \bar{B}$	m_0
0	1	1	$\bar{A}\ B$	m_1
1	0	0	$A\ \bar{B}$	m_2
1	1	1	$A\ B$	m_3

Y= $\bar{A}B + AB$
Y= $(A + B) \cdot (\bar{A} + B)$
Y= B

- Come si fa con l'aritmetica, possiamo utilizzare un algebra per semplificare le espressioni

$$\frac{1}{x}(x + xy) \Rightarrow \frac{x}{x}(1 + y) \Rightarrow (1 + y)$$