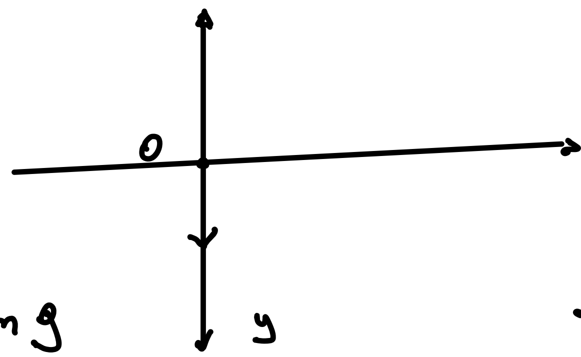
Equazioni differenziali



m

$y(t)$

$$m\underline{a} = \underline{F} = m\underline{g}$$

$$y''(t) = -g$$

$t=0$

$$y''(t) = -g$$

$$\downarrow$$

$$y'(t) = -gt + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + ct + d \qquad c, d \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

condizioni iniziali

$$0 = y'(0) = c \iff c = 0$$

$$y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + d$$

$$0 = y(0) = d \iff \underline{\underline{d=0}}$$

$$\underbrace{y(t) = -\tfrac{1}{2} g t^2}$$

t, y, z

$$m\, y''(t) = F(\underbrace{t, y(t), y'(t)})$$

$y(t)$ $\qquad y'(t) = -\lambda y(t) \quad , \underline{\lambda > 0}$

$g(x)$ continua in $[a,b]$

Primitiva di $g(x)$: $\qquad y'(x) = g(x)$

$x_0 \in [a,b]$, $\quad y(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt + c \qquad \underline{\underline{c \in \mathbb{R}}}$

$$y_0 = y(x_0) = c$$

$y(x_0) = y_0 \in \mathbb{R}$: abbiamo che $c = y_0$

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt + y_0$$

<u>unica</u> soluzione di $\begin{cases} y'(x) = g(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

Problema di Cauchy

ES. ① $y'(x) = \lambda y(x)$ equazione $I^{\underline{o}}$ ordine

Verifichiamo che $y(x) = c\, e^{\lambda x}$, $c \in \mathbb{R}$ è soluzione dell'equazione:

$$y'(x) = \lambda c\, e^{\lambda x} = \lambda\left(c\, e^{\lambda x}\right) = \lambda y(x)$$

Sono le uniche soluzioni? Supponiamo che $y(x)$ risolva l'equazione, e poniamo

$$z(x) = y(x)\, e^{-\lambda x}$$

$$z'(x) = y' e^{-\lambda x} - \lambda y e^{-\lambda x} = e^{-\lambda x}\big(\underbrace{y'(x) - \lambda y(x)}_{=0}\big) = 0$$

perché $y(x)$ è soluzione!

$$\Rightarrow z(x) = c, \quad c \in \mathbb{R}$$

quindi

$$c = y(x)\, e^{-\lambda x}, \text{ cioè}$$

$$y(x) = c\, e^{\lambda x}$$

$$\begin{cases} y' = \lambda y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

(imporre la condizione iniziale nelle soluzioni dell'equazione)

$$y(x) = c\, e^{\lambda x} \qquad (2)$$

$$y_0 = y(x_0) = \overset{?}{c}\, e^{\lambda x_0}$$

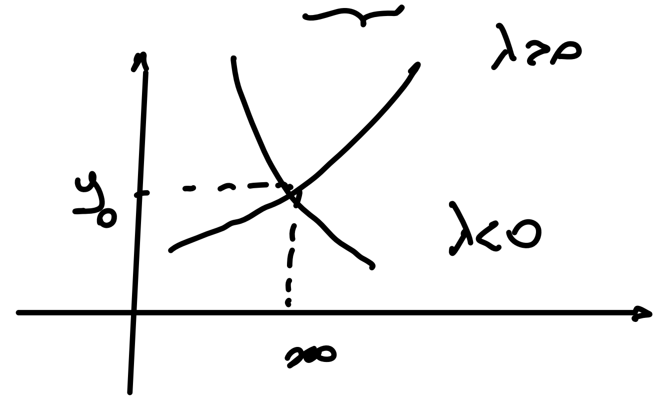
$$c = e^{-\lambda x_0} y_0$$: inserendo

nelle (2)

$$y(x) = \left(e^{-\lambda x_0} y_0\right) e^{\lambda x}$$

$$= y_0\, e^{\lambda (x - x_0)}$$

solo una!



$$y''(x) = \lambda\, y'(x) \qquad 2^{\circ} \text{ ordine}$$

$$z(x) = y'(x) \qquad z' = y''$$

$$z'(x) = \lambda z(x) \qquad \text{già discusso!}$$

$$z(x) = c\, e^{\lambda x} \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$y'(x) = c\, e^{\lambda x} \qquad y(x)\ ?$$

integrando, $\lambda \neq 0$

$$y(x) = \frac{c}{\lambda} \int e^{\lambda x} \lambda \, dx =$$

$$= \frac{c}{\lambda} e^{\lambda x} + d \, , \quad c, d \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} y''(x) = \lambda y(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \end{cases}$$

Problema di Cauchy $\quad y_0, y_0' \in \mathbb{R}$

$$y_0' = y'(x_0) = c\, e^{\lambda x_0}$$

$$\Leftrightarrow \quad c = y_0' \, e^{-\lambda x_0}$$

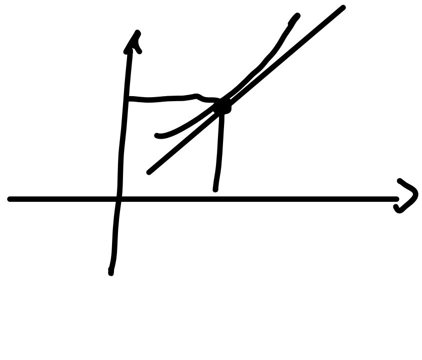
$$y(x) = \frac{1}{\lambda} y_0' \, e^{\lambda(x-x_0)} + d$$

$$y_0 = y(x_0) = \frac{1}{\lambda} y_0' + d$$

$$d = y_0 - \frac{1}{\lambda} y_0'$$

$$y(x) = \frac{1}{\lambda} y_0' \, e^{\lambda(x-x_0)} - \frac{1}{\lambda} y_0' + y_0$$

$$= \frac{1}{\lambda} y_0' \left(e^{\lambda(x-x_0)} - 1 \right) + y_0$$



$$y'(x_0) = y'_0$$

<u>In generale</u>, un'equazione differenziale del I° ordine è del tipo

$$y' = f(x, y(x)) \quad ||$$

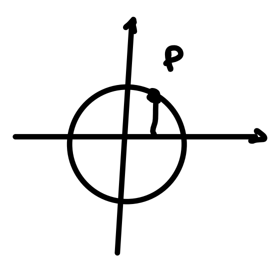
$$f = f(x,y) \quad \text{funzione di 2 variabili}$$

Es. $\overset{\text{lineare}}{\widetilde{y'}} = \lambda y \qquad f(x,y) = \lambda y$

$y' = \underbrace{x^2 - y^2}_{\text{non lineare}} \qquad f(x,y) = x^2 - y^2$

$y' = y^2$ eq. non lineare

<u>Eq. del 2° ordine</u>: $\quad y'' = f(\underbrace{x, y(x), y'(x)}_{f(x,y,z)})$



$y'' = \lambda y'$ eq. lineare

$y'' + \omega^2 y = 0$ equazione dei moti armonici

$$y(x) = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x, \quad \underline{\underline{c_1, c_2}} \in \mathbb{R}$$

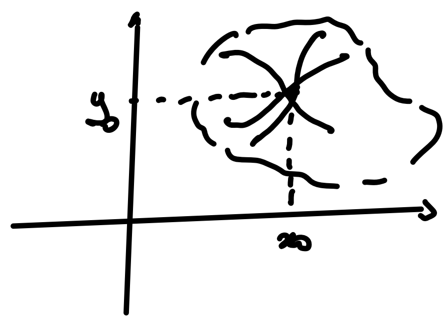
$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

equazione differenziale di ordine n, in forma normale

<u>Problema di Cauchy</u>

$1^{\underline{o}}$ ordine:

$$\begin{cases} y' = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$



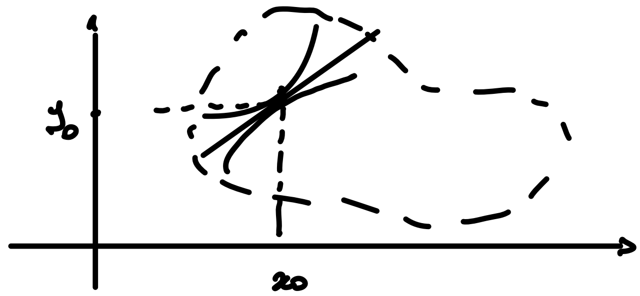
$f = f(x,y)$, $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(x_0, y_0) \in A$

<u>$2^{\underline{o}}$ ordine</u>

$$\begin{cases} y'' = f(x, y(x), y'(x)) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$$

$y_0, y'_0 \in \mathbb{R}$



Sistema di I° ordine:

$$\begin{cases} y' = f_1(x, y, z) \\ z' = f_2(x, y, z) \end{cases} \qquad x \to (y(x), z(x))$$

$$\begin{cases} y'' = f_1(x, y, z, y', z') \\ z'' = f_2(x, y, z, y', z') \end{cases}$$

$\downarrow$

<u>Osservazione</u> $y'' = f(x, y(x), y'(x))$: è equivalente ad un sistema di equazioni del I° ordine

$y_1(x) = y(x)$, $y_2(x) = y'(x)$

$$\begin{cases} y_1'(x) = y'(x) = y_2(x) \\ y_2'(x) = y''(x) = f(x, y_1(x), y_2(x)) \end{cases}$$

sistema del $I^{\underline{o}}$ ordine

•) $y'(x) = f(x, y(x))$ $\qquad f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\qquad f = f(x,y)$

Def. 1.) Una soluzione (o integrale) di •) è una funzione $y = y(x)$, $y : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, derivabile in I, tale che $(x, y(x)) \in A \ \forall x \in I$ e

$$y'(x) = f(x, y(x)), \ \forall x \in I.$$

2.) Una soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad (x_0, y_0) \in A$$

è una funzione $y = y(x)$, $y : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $x_0 \in I$, che risolve l'equazione in I e la condizione iniziale.

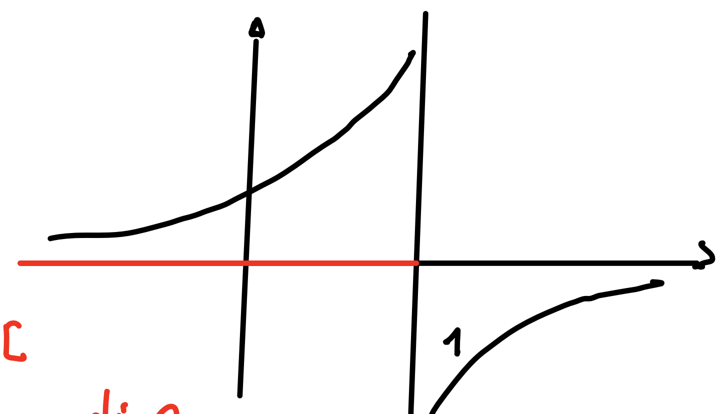
ES. (1) $\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $\qquad y = y(x)$

equazione non lineare, del primo ordine

punto iniziale!

$y(x) = \dfrac{1}{1-x}$ risolve (1)

$y(0) = 1$



$0 \in \underbrace{]-\infty, 1[}_{\text{intorno di } 0}$

$$y'(x) = -\frac{1}{(1-x)^2}\cdot(-1) = \frac{1}{(1-x)^2} = \Big(\underbrace{\frac{1}{1-x}}\Big)^2 = y^2(x)$$

$$P) \begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

•) Risoluzione locale (o in piccolo) quando si determina una soluzione di (P) definita in un <u>intorno</u> di x_0

••) Risoluzione globale (o in grande) quando si determina una soluzione di (P) in tutto l'intervallo dove è definita l'equazione differenziale.
$\mathbb{R}$

<u>ES</u> $\quad y' = \lambda y$

$$y(x) = c e^{\lambda x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Dir. max pendenza : $\lambda = (0, 1)$

$$\lambda = \frac{\nabla f(1,0)}{\|\nabla f(1,0)\|} = \frac{1}{5}(0,5)$$

$$= (0,1)$$