Lezione del 07/11/2022

$f(x,y)$, $f: X \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x_0, y_0) \in \mathring{X}$

(x_0,y_0) max o min relativo $\underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}$ $\nabla f(x_0,y_0) = 0$

$$\odot \quad \begin{cases} f_x(x_0,y_0) = 0 \\ f_y(x_0,y_0) = 0 \end{cases}$$

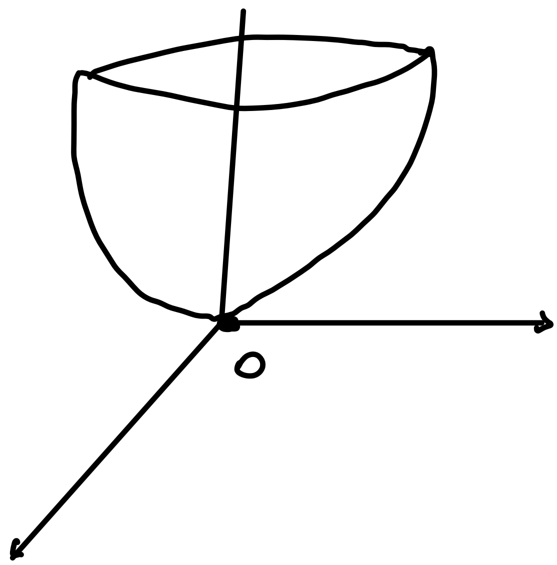
<u>Se</u> $\nabla f(x_0,y_0) = 0$, si dice che (x_0,y_0) è un punto <u>critico</u> o <u>stazionario</u>.

<u>ES.</u> $f(x,y) = x^2 + y^2$

$\nabla f = (2x, 2y)$

$\nabla f(0,0) = (0,0)$

$O = (0,0)$ minimo (assoluto)



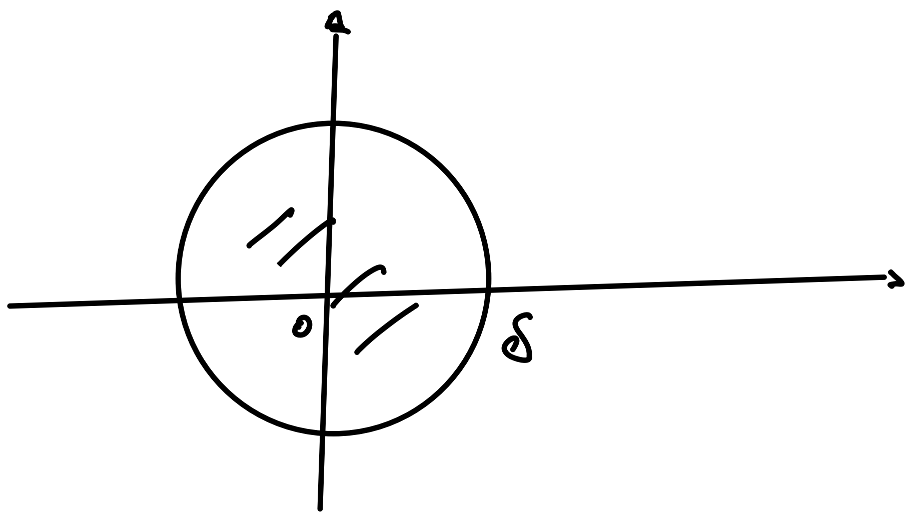
$$g(x,y) = \underbrace{x^2 - y^2}$$

$$\nabla f = (2x, -2y) = (0,0)$$

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$\underline{O} = (0,0)$ único punto crítico.



$$g(x,0) = x^2 > 0 = g(0,0)$$
$x \neq 0$

$$g(0,y) = -y^2 < 0 = g(0,0)$$
$y \neq 0$

$(0,0)$ né di minimo
né di massimo

$\Downarrow$

$(0,0)$ punto di sella

Def (x_0, y_0) punto di sella se

$\nabla f(x_0, y_0) = 0$ ma (x_0, y_0)

né di minimo né di massimo.

$f = f(x)$

x_0 di max. $\Rightarrow$ $f'(x_0) = 0$

$f''(x_0) \leq 0$

x_0 di min. $\Rightarrow$ $f'(x_0) = 0$

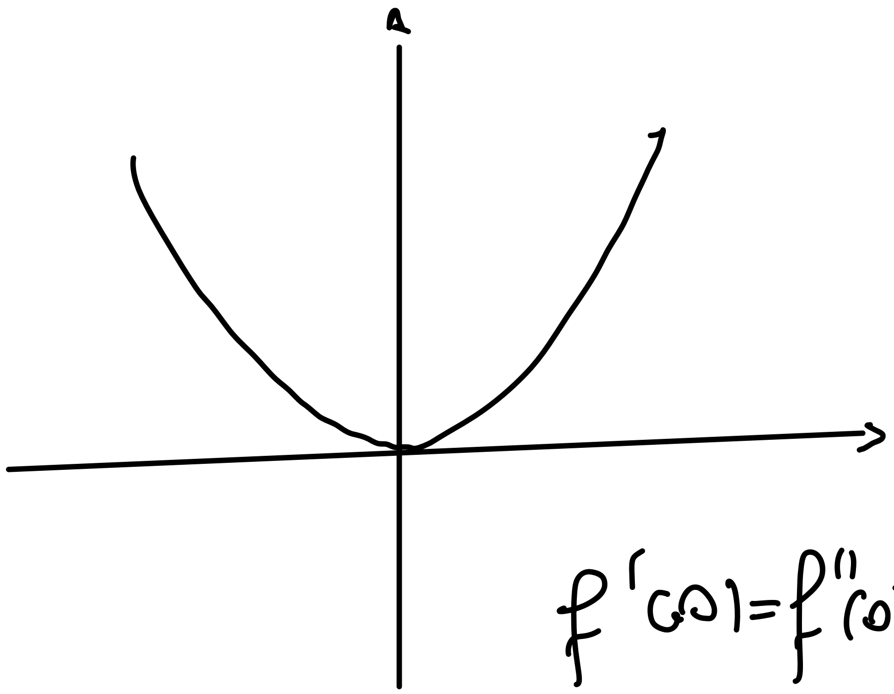
$f''(x_0) \geq 0$

Condizione sufficiente di II° ordine:

$$\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases} \Rightarrow$$ x_0 è di max. relativo

$$\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x_0 \text{ è di min. relativo}$$

$f(x) = x^4$



$f'(0) = f''(0) = 0$

$f' = 4x^3$

$f'' = 12x^2$

$f(x,y)$ $\quad f \in C^2$

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix}$$

per Schwartz

$$\underbrace{Hf(x,y)}_{\text{determinante hessiano di } f} = \det D^2 f(x,y) = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2$$

Condizione necessaria del II° ordine

$$(x_0,y_0) \text{ minimo relativo } \Rightarrow \begin{cases} f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0 \\ Hf(x_0,y_0) \geq 0 \\ f_{xx}(x_0,y_0) \geq 0 \end{cases}$$

$$(x_0, y_0) \text{ massimo relativo} \Rightarrow \begin{cases} f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0 \\ Hf(x_0,y_0) \geq 0 \\ f_{xx}(x_0,y_0) \leq 0 \end{cases}$$

$$(x_0, y_0) \text{ sella} \Rightarrow \begin{cases} f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0 \\ Hf(x_0,y_0) \leq 0 \end{cases}$$

Condizioni sufficiente del II° ordine

$$\begin{cases} f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0 \\ Hf(x_0,y_0) \underset{\neq}{>} 0 \\ f_{xx}(x_0,y_0) \underset{\neq}{<} 0 \end{cases} \Rightarrow (x_0,y_0) \text{ pto di max. relativo}$$

$$\begin{cases} f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0 \\ Hf(x_0,y_0) \underset{\neq}{>} 0 \\ f_{xx}(x_0,y_0) \underset{\neq}{>} 0 \end{cases} \Rightarrow (x_0,y_0) \text{ p.to di min. relativo}$$

$$\begin{cases} f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0 \\ Hf(x_0,y_0) \underset{\neq}{<} 0 \end{cases} \Rightarrow (x_0,y_0) \text{ p.to di sella}$$

Classificare i punti critici:

$$f(x,y) = x(x-1)^2 - y^2$$

$$f_x = (x-1)^2 + 2x(x-1) =$$

$$= x^2 - 2x + 1 + 2x^2 - 2x$$

$$= 3x^2 - 4x + 1$$

$$f_y = -2y$$

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2 - 4x + 1 = 0 \\ -2y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3x^2 \underbrace{- 4x + 1}_{} = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\Delta}{4} = 1 \qquad x_{1/2} = \frac{2 \pm 1}{3}$$

$$x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = 1$$

$A = \left(\frac{1}{3}, 0\right)$, $\quad B = (1, 0)$

punti critici !

$f_{xx} = 6x - 4 \qquad f_{xy} = 0 = f_{yx}$

$f_{yy} = -2$

$$f_{xx}\left(\tfrac{1}{3}, 0\right) = 6 \cdot \tfrac{1}{3} - 4 = 2 - 4 = -2$$

$$Hf\left(\tfrac{1}{3}, 0\right) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

Poiché $f_{xx}\left(\frac{1}{3}, 0\right) = -2 < 0$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{3}, 0\right)$ è di max. relativo

$B = (1,0)$: $f_{xx}(1,0) = 2$, $f_{xy} = f_{yx} = 0$

$f_{yy} = -2$

$$Hf(1,0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0$$

$B = (1,0)$ di sella.

$$f(x,y) = 2x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y$$

$$\begin{cases} f_x = 6x^2 - 6x = 0 \\ f_y = 3y^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - x = 0 \\ y^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad x^2 - x = 0 \; \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2 - 1 = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 1 \\ y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

$f_{xx} = 12x - 6$, $\underbrace{f_{xy} = 0 = f_{yx}}$

$f_{yy} = 6y$

$A = (0,1)$:

$f_{xx}(0,1) = -6$

$f_{yy}(0,1) = 6$

$$Hf(0,1) = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -36 < 0$$

$\Rightarrow$ A di <u>sella</u>.

$B = (0,-1)$, $f_{xx}(0,-1) = -6$

$f_{xy}(0,-1) = f_{yx}(0,-1) = 0$

$f_{yy}(0,-1) = -6$

$$Hf(0,-1) = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = 36 > 0$$

$f_{xx}(0,-1) = -6 < 0 \Rightarrow$ B di <u>massimo</u>

<u>N.B</u> Se $Hf(x_0,y_0) = 0$?

(x_0, y_0) di max, min, sella

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - (1+x+y)^3$$

$$\begin{cases} f_x = \cancel{3}x^2 - \cancel{3}(1+x+y)^2 = 0 \\ f_y = \cancel{3}y^2 - \cancel{3}(1+x+y)^2 = 0 \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \iff (x-y)(x+y) = 0 \\ x^2 - (1+x+y)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ x^2-(1+x+y)^2=0 \end{cases} \cup \begin{cases} x+y=0 \\ x^2-(1+x+y)^2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ x^2-(1+2x)^2=0 \end{cases} \cup \begin{cases} y=-x \\ x^2-1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=x \\ x^2-1-4x-4x^2=0 \end{cases} \cup \begin{cases} y=1 \\ x=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=x \\ -3x^2-4x-1=0 \end{cases} \cup \begin{cases} y=-1 \\ x=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2+4x+1=0 \\ y=x \end{cases} \qquad x_{1/2} = -\frac{2 \pm 1}{3}$$

$$x_1 = -1$$

$$x_2 = -\frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases} \cup \begin{cases} x=-\frac{1}{3} \\ y=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

$A=(-1,-1)$, $\quad B=\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$,

$C=(-1,1)$, $\quad D=(1,-1)$

<u>punti cercati</u>