# Lezione del 05/10/2022

## Serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} h^n = 1 + h + \dots + h^n + \dots$$

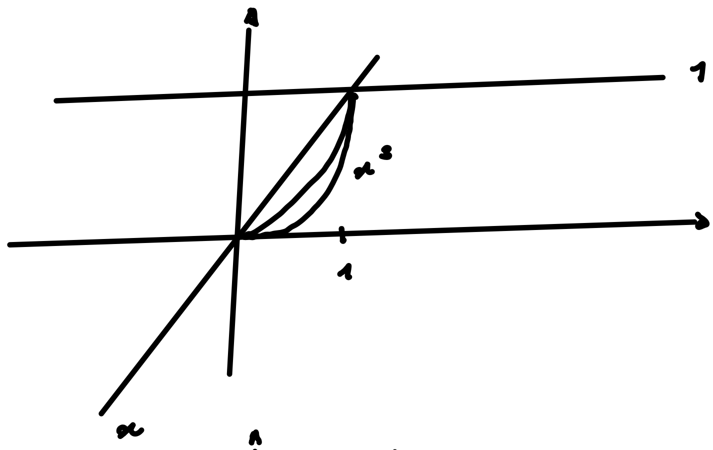
$$f_n(x) = x^n$$

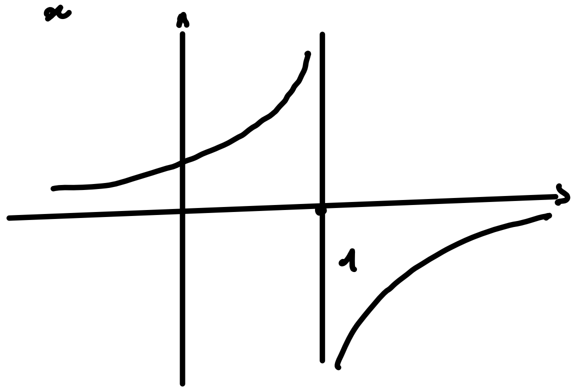
$x \leftrightarrow h$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \underset{x^3}{} \dots + x^n + \dots$$

$-1 < x < 1$ $\qquad = \dfrac{1}{1-x} = f(x)$

$x \in \mathbb{R}$




$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{quando} \quad -1 < x < 1$$

$(-1, 1)$

Def. $\{f_n\}$ $\quad f_n = f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in I$

$$f_n : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$f_n(x) = x^n \qquad f_n(x) = \qquad = \sin(nx)$

$$S_1(x) = f_1(x)$$
$$S_2(x) = f_1(x) + f_2(x)$$
$$S_3(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$$
$$\vdots$$
$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$$
$$\vdots$$

Serie di funzioni di termine generale $f_n(x)$

$\{S_n\} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

$x = 1/2 \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$x = 3 \quad \sum_{n=0}^{\infty} 3^n$

Def. Si dice che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge puntualmente in $I$ se

$$\forall x \in I, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{f_n(x)}_{\in\, \mathbb{R}} \quad \text{converge}$$

$$\iff \forall x \in I, \quad \{ S_n(x) \} \text{ è convergente}$$

$$\{ S_n \} \text{ è punt. convergente}$$

In tal caso, scriveremo

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} S_n(x) \qquad \forall x \in I$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = f(x) \qquad (1)$$

Se vale la (1), si dice che $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$

converge puntualmente ad $f = f(x)$, $f: I \to \mathbb{R}$ in tutto $I$.

<u>Def.</u> (Convergenza assoluta)

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge assolutamente in $I$ se

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| = |f_1(x)| + \dots + |f_n(x)| + \dots$$

converge puntualmente in $I$ $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| < +\infty \quad \forall x \in I$$

<u>OSS.</u> Se $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge assolutamente, allora converge puntualmente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\sin(nx)\, x^n}_{f_n(x)} \qquad x > 0$$

$$|f_n(x)| = |\sin(nx)\, x^n| \leq |x|^n = x^n$$

$0 < x < 1$

$\Rightarrow$ per il criterio del confronto, poiché $\sum x^n < +\infty$ quando $0 < x < 1$, abbiamo che

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| < +\infty$$

$\Rightarrow$ la serie iniziale converge assolutamente in $(0,1)$

**OSS.** $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ conv. assolutamente

$\Rightarrow$ conv. puntualmente

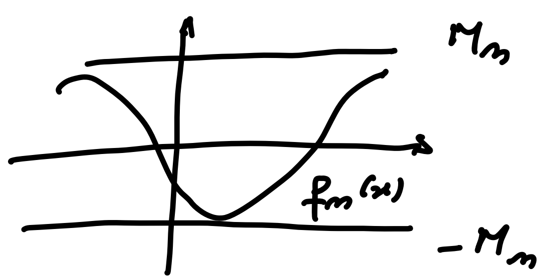
$\not\Leftarrow$

**Conv. totale** $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge totalmente

se $\exists \{M_n\}$, $M_n \geq 0$ tale che

$$|f_n(x)| \leq M_n, \quad \forall x \in I, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

e $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$



**Proposizione** : Convergenza totale

$$\Downarrow \quad \not\Uparrow$$

Convergenza assoluta

$$|f_n(x)| \leq M_n \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} M_n < +\infty$$

$\forall x \in I, \ \forall n \in \mathbb{N}$

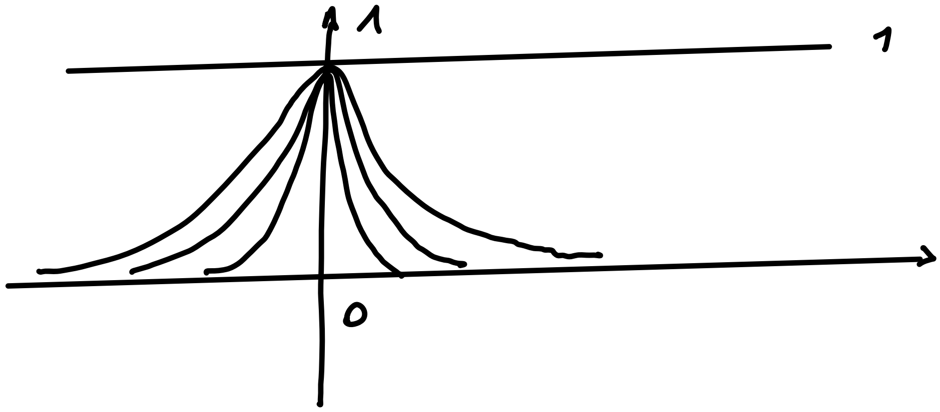
$$\Downarrow$$

(criterio confronto) $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ è convergente $\forall x \in I$

$\Rightarrow$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ è assolutamente convergente in $I$

**ES.** $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} = 1 + \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{(1+x^2)^2} + \dots + \dots + \frac{1}{(1+x^2)^n} + \dots$$

$$f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n} \quad , n \in \mathbb{N}$$

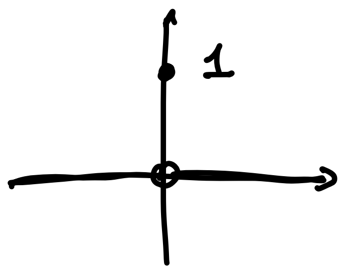



$$f_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}$$

$\longrightarrow 0$ per $n \to +\infty$

$\forall x \in \mathbb{R},\ x \neq 0$



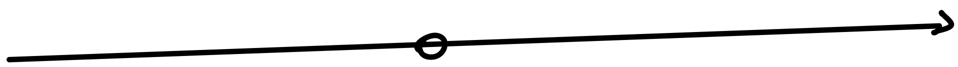

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n \underset{x=0}{=} \sum_{n=0}^{\infty} 1 = +\infty$$

$x \neq 0$ Serie geometrica di ragione

$$h = \frac{1}{1+x^2} < 1 \Rightarrow \text{la serie converge}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{1+x^2}} = \frac{1+x^2}{x^2}, \quad x \neq 0$$

la serie iniziale converge puntualmente in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$



<u>Conv. totale</u> ?

$$|f_n(x)| \leq M_n, \quad \sum M_n < +\infty$$

$$\frac{1}{(1+x^2)^n} \leq M_n \quad \forall x \neq 0$$

$$\sup_{x \neq 0} \frac{1}{(1+x^2)^n} \leq M_n$$

$1 \leq M_n$ : assurdo!!

poiché $\lim_{n \to \infty} M_n = 0$ .

# Serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \dots + a_n(x-x_0)^n + \dots$$

$\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$ , $x_0 \in \mathbb{R}$

$f_n(x) = a_n(x-x_0)^n$

Serie di potenze di punto iniziale (o centro) $x_0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \underbrace{(x+2)}_{x-(-2)}^n \qquad a_n = 2^n \qquad x_0 = -2$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-5}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^n} (x-5)^n$$

$x_0 = 5$

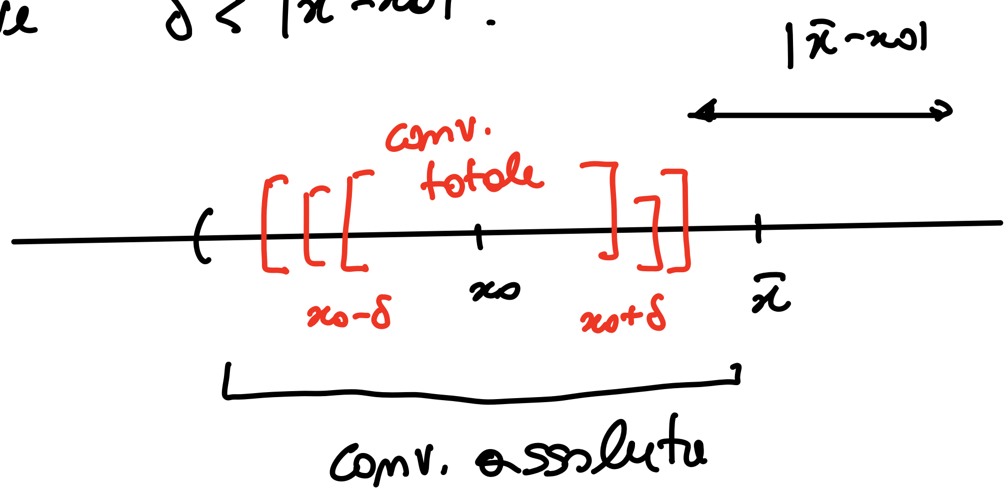
$a_n = \dfrac{1}{n^n}$

Se $x = x_0$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0$

**Lemma** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$. Supponiamo che la serie converga per $x = \bar{x} \neq x_0$. Allora la serie converge assolutamente per ogni $x$ tale che $|x - x_0| < |\bar{x} - x_0|$ e converge totalmente per ogni $x$ tale che

$$|x - x_0| \leq \delta \iff x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

dove $\delta < |\bar{x} - x_0|$.



$$x_0 + |\bar{x} - x_0| = \bar{x}$$

$$x_0 - |\bar{x} - x_0| = x_0 - \bar{x} + x_0$$

$$= 2x_0 - \bar{x}$$