Lezione del 23/11/2022

Eq. a coeff. costanti:

$$(1) \quad y'' + a y' + b y = 0 \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

$$P(\lambda) = \underbrace{\lambda^2 + a\lambda + b = 0}_{\text{eq. caratteristica}} \qquad (2)$$

a) $\Delta > 0$: due radici λ_1, λ_2 di (2), reali e distinte $\quad \lambda_1 \neq \lambda_2$

$$\underbrace{y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}}_{\text{lin. indipendenti}}$$

Int. generale è $\quad y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$

$$\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

b) $\Delta = 0$

$$y'' + 2y' + y = 0$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \qquad \Delta = 0$$

$$(\lambda + 1)^2 = 0$$

$\lambda = -1$ radice doppia

In generale, abbiamo una radice doppia λ

$$y_1 = e^{\lambda x} \qquad y_2 = x e^{\lambda x}$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda x} & x e^{\lambda x} \\ \lambda e^{\lambda x} & e^{\lambda x} + \lambda x e^{\lambda x} \end{vmatrix}$$

$$= e^{2\lambda x} + \cancel{\lambda x e^{2\lambda x}} - \cancel{\lambda x e^{2\lambda x}} > 0$$

L'integrale generale sarà allora:

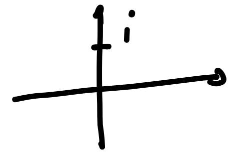
$$y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}, \quad \underline{\underline{c_1, c_2 \in \mathbb{R}}}$$

$$y'' + 2y' + y = 0 \qquad \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$
$$\lambda = -1$$

L'integrale generale è $y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$

c) $\Delta < 0$: due radici complesse coniugate

$$\lambda = \alpha \pm i\beta$$



$$\alpha = \mathrm{Re}\,\lambda, \quad \beta = \mathrm{Im}\,\lambda$$

$$y_1 = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{-i\beta x}$$

$$y_2 = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x}$$

$$e^{i\gamma} = \cos\gamma + i\sin\gamma$$ f.le di Eulero

$$e^{-i\gamma} = \cos\gamma - i\sin\gamma$$

$$y_1 = e^{\alpha x}\left(\cos(\beta x) - i\sin(\beta x)\right)$$

$$y_2 = e^{\alpha x}\left(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \bar{y}_1 = \dfrac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x}\cos(\beta x) \\[2ex] \bar{y}_2 = \dfrac{y_2 - y_1}{2i} = e^{\alpha x}\sin(\beta x) \end{array}\right] \text{lin. indipendenti}$$

Calcoliamo il Wronskiano:

$$\bar{y}_1' = \alpha e^{\alpha x}\cos(\beta x) - \beta e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

$$\bar{y}_2' = \alpha e^{\alpha x}\sin(\beta x) + \beta e^{\alpha x}\cos(\beta x)$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x}\sin\beta x \\ e^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x) & (\alpha\sin\beta x + \beta\cos\beta x)e^{\alpha x} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} = e^{2\alpha x}\Big[& \cancel{\alpha\cos(\beta x)\sin(\beta x)} + \beta\cos^2\beta x \ - \\ & - \cancel{\alpha\sin(\beta x)\cos(\beta x)} + \beta\sin^2\beta x \Big] \end{aligned}$$

$$= \beta e^{2\alpha x} \neq 0$$

L'integrale generale è

$$y = c_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

$$= e^{\alpha x}\left(c_1\cos(\beta x) + c_2\sin(\beta x)\right)$$

$y'' + \omega^2 y = 0$

$\lambda^2 + \omega^2 = 0$ $\qquad \lambda = \pm\sqrt{-\omega^2} = \pm\sqrt{\omega^2 i^2}$

$= \pm \omega i$

$\beta = \omega \ , \alpha = 0$

$y = c_1 \cos(\omega x) + c_2 \sin(\omega x)$

ES. $\quad y'' - 4y' + 20y = 0$

$\lambda^2 - 4\lambda + 20 = 0$

$\frac{\Delta}{4} = 4 - 20 = -16 < 0$ $\qquad i^2 = -1$

$\lambda_{1/2} = 2 \pm \sqrt{-16} =$

$= 2 \pm \sqrt{16 i^2} =$

$= 2 \pm 4i$

$\alpha = 2, \ \beta = 4$

$$y = e^{2x}\left(c_1 \cos(4x) + c_2 \sin(4x)\right)$$

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \qquad y(0)=0\ ,\ y'(0)=1$$

Eq. caratt. $\quad \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \qquad (\lambda-2)^2 = 0$

$$\frac{\Delta}{4} = 4-4 = 0$$

$\lambda = 2$ radice doppia

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$$

$$0 = y(0) = c_1 \iff \boxed{c_1 = 0}$$

$$y' = 2c_1 e^{2x} + c_2\left(e^{2x} + 2xe^{2x}\right)$$

$$1 = y'(0) = 2c_1 + c_2$$

$$\underbrace{2c_1}_{=0} + c_2 = 1 \iff \boxed{c_2 = 1}$$

$y = x e^{2x}$ soluzione Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 3 \end{cases} \quad ||$$

Equazioni non omogenee

(3) $\quad y'' + a(x) y' + b(x) y = f(x) \overset{?}{\neq 0}$

Eq. omogenea associata

$$y'' + a(x) y' + b(x) y = 0$$

y_1, y_2 lin. indipendenti

$$c_1 y_1 + c_2 y_2$$

Se $\bar{y}$ è un integrale particolare della ③

$$\underbrace{c_1 y_1 + c_2 y_2} + \underbrace{\bar{y}} \quad \text{risolve ③}$$

<u>Teorema</u> Se $\bar{y}$ è un integrale particolare di (3), y_1, y_2 integrali linearmente indipendenti dell'equazione omogenea associata a ③ l'integrale generale della ③ è dato da

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \bar{y}$$

$$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

|| Equazioni a coefficienti costanti con termini noti di forma particolare ||

$$y'' + a y' + b y = f(x)$$

1) $$f(x) = e^{\lambda x} \underbrace{p(x)}_{\text{polinomio}} , \lambda \in \mathbb{R}$$

Es. $$f(x) = 1 = e^{0\cdot x} \cdot 1$$

$\lambda = 0$ $\quad p(x)$

$$f(x) = e^{-x} \qquad \lambda = -1, \quad p(x) = 1$$

$$f(x) = \underbrace{(x^2+1)}_{p(x)} e^{4x}$$

λ

1a) λ non è radice dell'eq. caratteristica dell'omogenea associata, cioè

$$P(\lambda) \neq 0$$

non è

- $$y'' + 2y' + y = 1 \cdot e^{1\cdot x} = f(x)$$

λ

$$y'' + 2y' + y = 0$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \iff (\lambda+1)^2 = 0 , \quad \lambda = -1$$

Allora un integrale particolare dell'equazione completa è della forma

$$\bar{y} = e^{\lambda x} \underbrace{q(x)}_{\text{polinomio dello stesso grado di } p(x), \text{ da determinare,}}$$

$$\bar{y} = e^{x} \cdot a = \underbrace{a}_{?} e^{x} \qquad a \in \mathbb{R}$$

Determiniamo a, imponendo $\bar{y}$ sia soluzione dell'equazione completa:

$$\bar{y}' = a e^{x}, \quad \bar{y}'' = a e^{x},$$

Sostituendo

$$a e^{x} + 2 a e^{x} + a e^{x} = e^{x}$$

$$4a\cancel{e}^x = \cancel{e}^x$$

$$a = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{y} = \frac{1}{4} e^x$$ int. particolare

$$\bar{y}' = \bar{y}'' = \frac{1}{4} e^x \ ;$$

$$\frac{1}{4} e^x + 2 \cdot \frac{1}{4} e^x + \frac{1}{4} e^x$$

$$= e^x$$

L'int. generale dell'equazione omogenea è

$c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$

Int. generale completa

$y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + \frac{1}{4} e^{x}$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$y'' + 5y' + 4y = x e^{x} = f(x)$

$y'' + 5y' + 4y = 0$

$\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$

$$\Delta = 25 - 16 = 9 > 0$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{-5 \pm 3}{2} \begin{cases} -4 \\ -1 \end{cases}$$

Int. omogeneo:

$$y = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{-x}$$

$$f(x) = e^{1 \cdot x} \cdot \underbrace{x}_{p(x)}$$

$$\lambda = 1$$

non è radice!

2

$$\bar{y} = e^{x} (\underbrace{a}_{} x + \underbrace{b}_{})$$

?

$$y' = e^x(ax+b) + ae^x$$

$$= axe^x + be^x + ae^x$$

$$y'' = ae^x + axe^x + be^x$$

$$+ ae^x =$$

$$= 2ae^x + axe^x + be^x$$

Sostituendo:

$$2ae^x + axe^x + \tilde{b}e^x + 5axe^x$$

$$+ 5\tilde{b}e^x + 5ae^x +$$

$$+\ 4ax e^x + 4b e^x = x e^x$$

$$7a\cancel{e^x} + \underbrace{10ax}\cancel{e^x} + 10b\cancel{e^x} = x\cancel{e^x}$$

$$10ax + (10b + 7a) = x$$

$$\begin{cases} 10a = 1 \\ 10b + 7a = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1/10 \\ 10b + \frac{7}{10} = 0 \end{cases}$$

$$10b = -\frac{7}{10}$$

$$b = -\frac{7}{100}$$

$$\bar{y} = e^{x}\left(\frac{1}{10}x - \frac{7}{100}\right)$$

Int. generale completa:

$$y = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{-x} +$$

$$+ e^{x}\left(\frac{1}{10}x - \frac{7}{100}\right)$$

1_b) Se $P(\lambda) = 0$

$$\underbrace{y'' + 2y' + y}_{\lambda = -1} = 1 \cdot \underbrace{e^{-x}}_{\lambda = -1} \qquad \odot$$

Un integrale particolare è della forma

$$\bar{y} = e^{\lambda x} q(x) \cdot x^h$$

h = ordine di molteplicità di λ.

$$\bar{y} = e^{-x} \cdot a \cdot x^2 =$$

$$= a x^2 e^{-x}$$

$$\bar{y}' = 2axe^{-x} - ax^2e^{-x}$$

$$\bar{y}'' = 2ae^{-x} - 2axe^{-x} - 2axe^{-x} + ax^2e^{-x}$$

$$= 2a e^{-x} - 4ax e^{-x} + ax^2 e^{-x}$$

Sostituendo:

$$2ae^{-x} - \cancel{4axe^{-x}} + \cancel{ax^2 e^{-x}} + \cancel{4axe^{-x}} - \cancel{2ax^2 e^{-x}} + \cancel{ax^2 e^{-x}} = e^{-x}$$

$$2a e^{-x} = e^{-x}$$

$$2a = 1 \iff \underline{\underline{a = 1/2}}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{2}x^2 e^{-x}$$

$$y'' + 2y' + y = x^2 e^{-x}$$

$$q(x) = ax^2 + bx + c$$