Lezione del 22/12/2022

Probabilità

Ω spazio campione , $E \subseteq \Omega$

$$P : \{\text{Eventi di un esperimento aleatorio}\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$E \longrightarrow P(E)$$

Probabilità classica

Ω spazio campione , $E \subseteq \Omega$ evento

$$P(E) = \frac{\text{numero dei casi favorevoli ad } E}{\text{numero di tutti i casi possibili}} = \underbrace{\frac{m_E}{m}}_{\in [0,1]}$$

$m_E = |E|$, $m = |\Omega|$

ES. Lancio di un dado : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

E. "Uscita di un numero dispari"

$E = \{1, 3, 5\}$ $\quad P(E) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

A. "Uscita del 4" : $P(A) = 1/6$

$$P : \{\text{eventi}\} \longrightarrow [0,1]$$

Prop. (Regole di calcolo della probabilità)

(i) $0 \leq P(E) \leq 1$; $P(\Omega) = 1$

$P(\phi) = 0$

(ii) A, B eventi incompatibili $(A \wedge B = \phi)$

$$P(A \vee B) \underbrace{=}_{\text{additività finita}} P(A) + P(B)$$

Probabilità (secondo Kolmogoroff)

"σ-algebra di un insieme Ω"

$\Omega \neq \phi$ insieme non vuoto

2^{Ω} insieme delle parti di Ω

$\mathcal{M} \subseteq 2^{\Omega}$: si dice σ - algebra

$\mathcal{M} \neq \emptyset$

se verifica le seguenti proprietà:

i) $A \in \mathcal{M} \Rightarrow \neg A = \Omega \setminus A \in \mathcal{M}$

ii) $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{M}$

$$\Downarrow$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$$

<u>Conseguenze</u> : (1) $A_1, A_2 \in \mathcal{M}$

$$A_1 \cap A_2 \in \mathcal{M}$$

(2) $\Omega, \phi \in \mathcal{M}$: infatti,

$$E \in \mathcal{M} \Rightarrow \underbrace{E \cap \neg E}_{\phi} \in \mathcal{M}$$

$$\neg E \in \mathcal{M}$$

$$\neg \phi = \Omega \in \mathcal{M}$$

3) $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{M}$, allora

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$$

ES.

(1) 2^{Ω} è una σ-algebra

(2) Borel, σ insiemi boreliani

$\mathbb{R}$: la più piccola σ-algebra

che contiene gli intervalli aperti

$$]a, b[\; : \; a, b \in \mathbb{R}$$

$\mathcal{B}$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}]a_n, b_n[$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}]a_n, b_n[$$

$\{x\} \in \mathcal{B} \quad \forall x \in \mathbb{R}$:

$$\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{]x - 1/n, x + 1/n[}_{\substack{\cap \\ \mathcal{B}}}$$

<u>Def.</u> (Probabilità - definizione assiomatica)

Ω spazio campione, $\mathcal{M} \subseteq 2^{\Omega}$ σ-algebra di Ω: una misura di probabilità è una funzione d'insieme

$$P : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$E \in \mathcal{M} \longrightarrow P(E)$$

che soddisfa le seguenti proprietà:

i) $P(E) \geq 0 \quad , \forall E \in \mathcal{M}$;

ii) $P(\Omega) = 1$

iii) se $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots \in \mathcal{M}$

a due a due disgiunti (o mutuamente esclusivi) $E_i \wedge E_j = \phi \quad \forall i \neq j$

si ha

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = P(E_1) + \dots + P(E_n) + \dots$$

$$= \sum_{n \geq 1}^{\infty} P(E_n)$$

OSS. In particolare, se P è una misura di probabilità, da iii) si ha che se $E_1 \wedge E_2 = \emptyset$

$$P(E_1 \vee E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

ES. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\mathcal{M} = 2^{\Omega}$

$P : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ prob. classica

Def. $\underbrace{(\Omega, \mathcal{M}, P)}_{\text{spazio di probabilità}}$

ES. $\Omega = \mathbb{R}$

$\mathcal{M} = \mathcal{B}$ boreliani

$$P(A) = \int_A \frac{1}{\pi(1+x^2)}\,dx$$

$\forall A \in \mathcal{B}$

$$P(A) \geq 0$$

$$P(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi(1+x^2)}\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi(1+x^2)}\,dx =$$

$$= \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int_a^b \frac{1}{\pi(1+x^2)}\,dx$$

$$= \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \frac{1}{\pi} \left(\operatorname{arctg} x \right)_a^b$$

$$= \frac{1}{\pi} \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \underbrace{\left(\overbrace{\operatorname{arctg} b}^{\frac{\pi}{2}} - \overbrace{\operatorname{arctg} a}^{-\frac{\pi}{2}} \right)}_{\pi}$$

$$= 1$$

<u>Proposizione</u> (Proprietà elementari della probabilità)

$(\Omega, \mathcal{M}, P)$ spazio di probabilità. Si ha

1) $P(\emptyset) = 0$

2) $P(\neg A) = P(\Omega \setminus A) = \overbrace{P(\Omega)}^{=1} - P(A) = 1 - P(A)$

3) $A \subset B \implies P(A) \leq P(B)$ ⊙

4) $0 \leq P(A) \leq 1$

5) $P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(A \wedge B)$

6) $P(A \wedge B) \leq P(A) \leq P(A \vee B)$

$$A \wedge B \subseteq A \subseteq A \vee B$$

Probabilità condizionata

Lancio del dado a 6 facce

A = uscita del numero 3 $= \{3\}$

$B = \{1, 3, 5\}$

$P(A) = 1/6$ $\qquad$ $P(A|B) = 1/3$

" $P(A|B)$ = probabilità di A condizionata a B "

Def. $(\Omega, \mathcal{M}, P)$ spazio di probabilità

$A, B \in \mathcal{M}$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

"

probabilità di A condizionata a B

ES. $P(A \cap B) = 1/6$

$$P(B) = 3/6 = 1/2$$

$$P(A|B) = \frac{1}{6} \cdot 2 = 1/3$$

<u>OSS.</u> Se $A \cap B = \emptyset \Rightarrow$

$$P(A|B) = 0$$

Se $B \subset A \Rightarrow P(A \cap B) = P(B)$

$$P(A|B) = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

Se $A \subset B$: $A \cap B = A$

$$P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)} \geq P(A)$$

(negativamente)

Def. A, B sono positivamente correlati

se $P(A|B) > P(A)$

$(P(A|B) < P(A))$

A, B sono "indipendenti" se

$$P(A|B) = P(A)$$

$$\Leftrightarrow \quad P(B|A) = P(B)$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \wedge B)}{P(A)}.$$

<u>Teorema</u> (legge delle probabilità composte)

$(\Omega, \mathcal{M}, \mathbb{P})$ spazio di probabilità

$A, B \in \mathcal{M}$ eventi.

$$\mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B)$$

$$= \mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A)$$

<u>Inoltre</u> $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

$\Leftrightarrow$ A, B eventi indipendenti

$\overset{se}{\Leftarrow}$ A, B eventi indipendenti,

$\rightarrow \quad P(A|B) = P(A)$

$$P(A \cap B) = \underbrace{P(A|B)} \cdot P(B) = P(A) \cdot P(B)$$

$\Rightarrow$ Se $\quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

allora $\quad P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A) \cdot \cancel{P(B)}}{\cancel{P(B)}}$

$$= P(A)$$

$\Rightarrow$ A, B indipendenti.