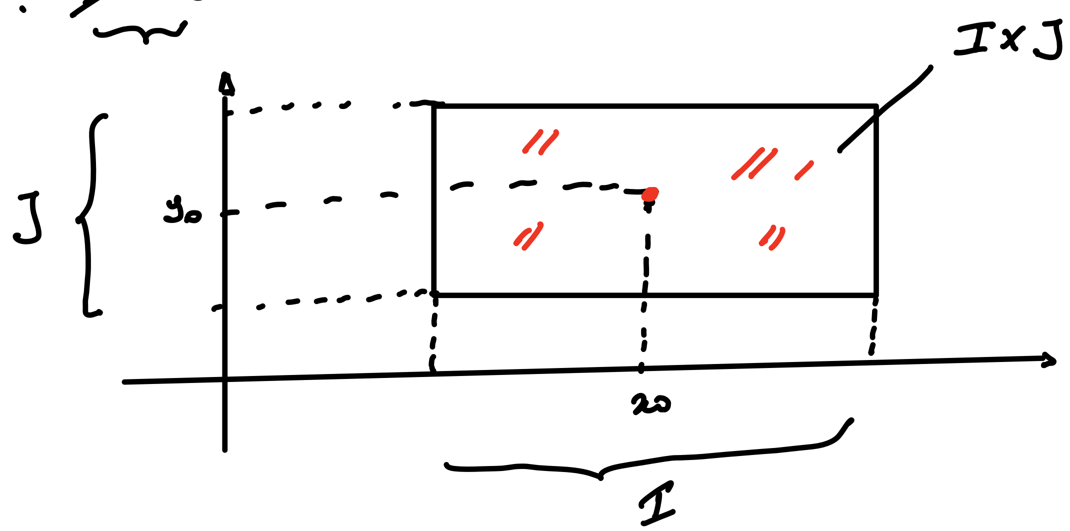
Lezione del 16/11/2022

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

$$I = [x_0 - a,\ x_0 + a] \qquad a, b > 0$$
$$J = [y_0 - b,\ y_0 + b]$$

$$f : \underbrace{I \times J}_{} \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$



1) f continua in $I \times J$.

2) $\exists\, L > 0$ tale che

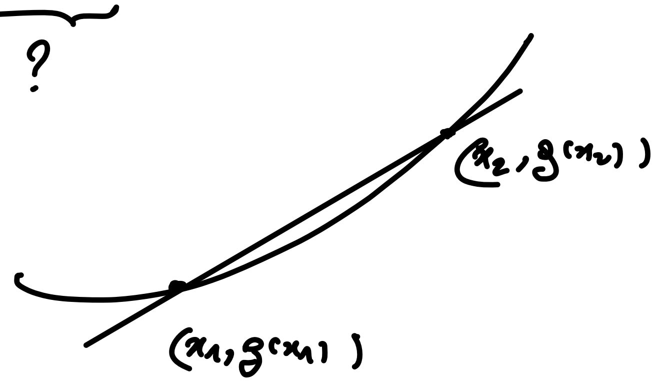
$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L\, |y_1 - y_2|$$
$$\forall x \in I, \ \forall y_1, y_2 \in J$$

ossia che $f(x,y)$ è LIPSCHITZIANA rispetto alla variabile y, uniformemente rispetto alla variabile x.

Def - $g = g(x)$ LIPSCHITZIANA SE $g : X \to \mathbb{R}$

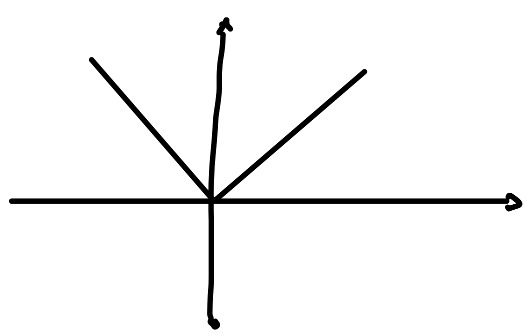
$$\exists L > 0 : \quad |g(x_1) - g(x_2)| \leq L\, |x_1 - x_2|, \quad \forall x_1, x_2 \in X$$

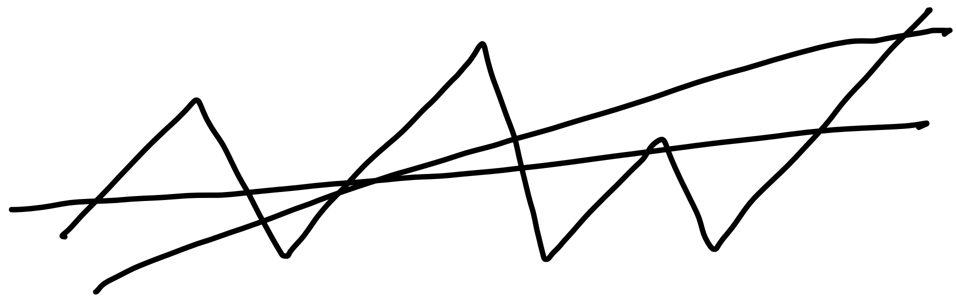
$$\to \quad \underbrace{\left| \frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} \right|}_{?} \leq L \quad , \forall x_1, x_2 \in X \quad x_1 \neq x_2$$



$g(x) = |x|$ è LIPSCHITZIANA

$$|g(x_1) - g(x_2)| = \big||x_1| - |x_2|\big| \leq \underset{\underset{L}{\parallel}}{1} \cdot |x_1 - x_2|$$





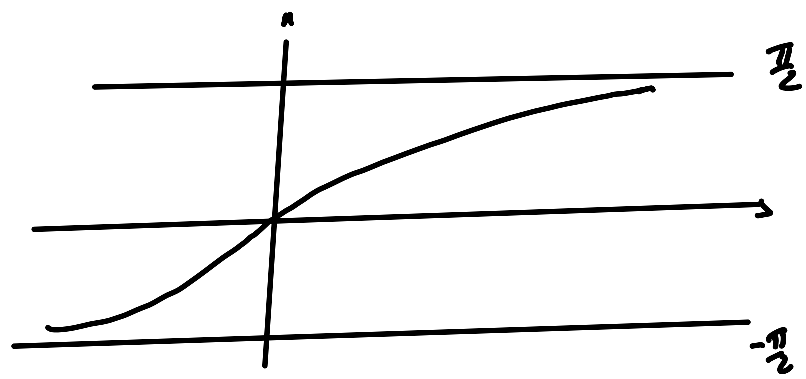
1°) g Lipschitziana $\Longrightarrow$ g è continua

2°) $g \in C^1$: g Lipschitziana $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \exists L > 0 \; : \; |g'(x)| \leq L$

$g(x) = \operatorname{arctg} x$ $\qquad$ $g'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

$$|g'(x)| = \frac{1}{1+x^2} \leq 1 := L$$

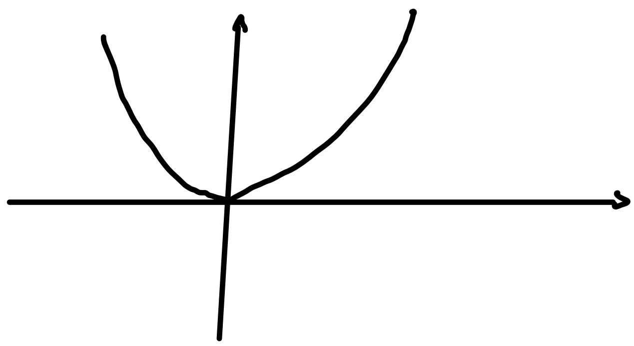


$g(x) = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $g'(x) = 2x$

$|g'(x)| = 2|x| \longrightarrow +\infty$ x $x \to \pm\infty$

$g(x) = x^2 \quad \forall x \in [-a, a] \quad a > 0$

$$|g'(x)| = 2|x| \leq 2a =: L$$



Teorema di esistenza e unicità locale (o in piccolo) di Cauchy.

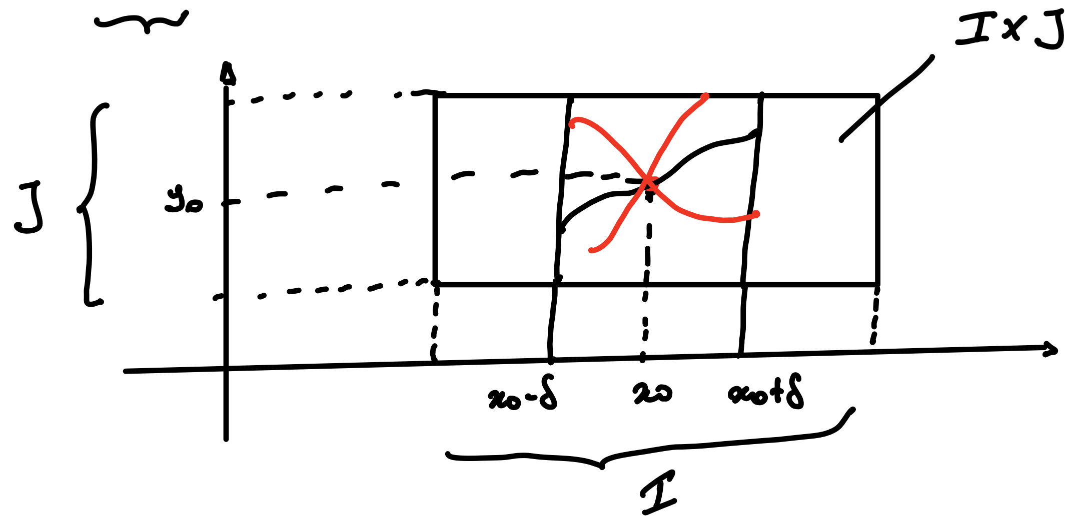
Nelle ipotesi (1) – (2) per $f: I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$, esiste $0 < \delta < a$ ed esiste una ed una sola funzione

$$y: [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad y = y(x)$$

derivabile e che risolve in $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$y'(x) = f(x, y(x))$$
$$\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$



<u>OSS.</u> (Formulazione integrale del problema di Cauchy)

Sono equivalenti le seguenti condizioni:

1) $\exists!\ y : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \to \mathbb{R}$ soluzione del problema di Cauchy;

2) $\exists!\ y : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \to \mathbb{R}$, continua soluzione di

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt$$ equazione integrale!

$$\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

1) $\Rightarrow$ 2) Abbiamo che

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

integrando

$$\int_{x_0}^{x} y'(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt$$

$$\begin{aligned} &\parallel \\ &y(x) - y(x_0) \\ &\parallel \\ &y(x) - y_0 = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt \end{aligned}$$

2) $\Rightarrow$ 1)

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt$$

Dal teorema fondamentale del calcolo integrale,

$$\int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt \quad \text{è derivabile}$$

$$\text{e} \quad \frac{d}{dx} \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt = f(x, y(x))$$

Da (*), si ha

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

$$y(x_0) = y_0$$

<u>Corollario</u> Supponiamo che f continua in $I \times J$ e $f \in C^1(I \times J)$.

Allora vale la tesi del teorema di Cauchy

<u>Dim.</u> Poiché f_y è continua in $I \times J$, da Weierstrass: $|f_y(x, y)| \leq L$

$\forall (x,y) \in I \times J.$

$$|f(x,\underbrace{y_1}) - f(x,\underbrace{y_2})| = |f_y(x,\Theta)\cdot(y_1-y_2)|$$

Θ tra y_1 e y_2 teorema di Lagrange

$$= |f_y(x,\Theta)|\,|y_1-y_2| \leq L\,|y_1-y_2|$$

Equazioni lineari del I° ordine

$$y' = \underbrace{a(x)}_{\text{coefficiente}}\,y + \underbrace{b(x)}_{\text{termine noto}}$$

continue in I intervallo di $\mathbb{R}$

$y' = \lambda y$ $\qquad a(x) = \lambda\ ,\ b(x) = 0$

$$y' = \underbrace{(\operatorname{sen} x)}_{a(x)}\,y + \underbrace{\log x}_{b(x)}$$

$b(x)=0 \longrightarrow$ Equazioni omogenee

$y' = a(x)\,y$ separazione di variabili

$$\frac{dy}{dx} = a(x)\,y \quad : \text{dividendo per } y \neq 0$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int a(x)\,dx$$

$$\log|y| = \int a(x)\,dx$$

$y' = x^2 y$ $\qquad \frac{dy}{dx} = x^2 y$

$y \neq 0$ $\qquad \int \frac{dy}{y} = \int x^2\,dx$

$$\log|y| = \frac{x^3}{3} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

e

$$|y| = e^{\frac{x^3}{3}+c} = e^{c}e^{\frac{x^3}{3}}$$

$(|a| = b \iff a = \pm b)$

$$\Updownarrow$$

$$y = \underbrace{(\pm e^c)}_{K} e^{x^3/3}$$

$$y = K e^{x^3/3} \qquad K \neq 0$$

$y = 0$ è soluzione : $y' = 0 = x^2 y$

$$y = K e^{x^3/3} \qquad \forall K \in \mathbb{R}$$

l'integrale generale dell'equazione

$$y' = \frac{(x-1)y}{x} = \frac{x-1}{x} y$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{x-1}{x} dx$$

$$\log|y| = \int \frac{x-1}{x} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x}\right) dx =$$

$$= x - \log|x| + c$$

$$|y| = e^{x - \log|x|} e^{c} =$$

$$= e^{x} \cdot e^{-\log|x|} \cdot e^{c}$$

$$= \frac{1}{|x|} e^{x} \cdot e^{c}$$

$$\Leftrightarrow \quad y = K \frac{e^{x}}{x} \qquad k \in \mathbb{R}, \text{ integrale generale}$$

$$y' = (tg x) y$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int tg x$$

$$\log|y| = \int tg x \, dx = -\int \frac{-\sin x}{\underset{\smile}{\cos x}} \, dx$$

$$= -\log|\cos x| + c$$

$$|y| = e^{c} e^{-\log|\cos x|} = e^{c}/|\cos x|$$

$$y = \frac{\pm e^{k}}{\cos x} = \frac{k}{\cos x}$$

$$y' = \frac{y}{x \log x} \qquad y' = (\operatorname{arctg} x)\, y$$

$$(1)\ y' = \underbrace{a(x)}\, y + b(x) \qquad b(x) \neq 0$$

determiniamo una primitiva di $a(x)$, ossia una funzione $A(x)$ tale che $A'(x) = a(x)$

Moltiplichiamo ambo i membri di (1) per

$$e^{-A(x)} :$$

$$e^{-A(x)}\, y' = a(x)\, e^{-A(x)}\, y + e^{-A(x)}\, b(x)$$

$$e^{-A(x)}y' - \underbrace{\underbrace{a(x)}_{A'(x)} e^{-A(x)} y}_{} = e^{-A(x)} b(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[e^{-A(x)} y \right] = e^{-A(x)} b(x)$$

integrando:

$$e^{-A(x)} y = \int e^{-A(x)} b(x)\, dx$$

$$\rightarrow y = \underbrace{e^{A(x)} \int e^{-A(x)} b(x)\, dx}_{\text{l'integrale generale}}$$

$$y' = 3y + 1$$

$$a(x) = 3$$

$$b(x) = 1$$

$$A(x) = 3x$$

$$y = e^{3x} \int \underbrace{e^{-3x}} \cdot 1 \, dx$$

$$= -\frac{e^{3x}}{3} \int (-3) e^{-3x} \, dx =$$

$$= -\frac{e^{3x}}{3} \cdot \left(e^{-3x} + c \right)$$

$c \in \mathbb{R}$

$$= -c \frac{e^{3x}}{3} - \frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} y' = -y + e^{x} \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad \odot$$

$a(x) = -1$

$b(x) = e^{x}$

$A(x) = -x$

L'integrale generale è

$$y = e^{-x} \int e^{x} e^{x} \, dx$$

$$= e^{-x} \int e^{2x} \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} e^{-x} \left(e^{2x} + c \right)$$

$$y(0) = \frac{1}{2} (1 + c)$$

Imponendo le cond. iniziale $y(0) = 1$

$$1 = y(0) = \frac{1}{2} + \frac{c}{2}$$

$$\frac{c}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{c = 1}$$

$$y = \frac{1}{2} e^{-x}\left(e^{2x} + 1\right)$$