Preliminari al corso di Analisi Matematica 1 Seconda parte

Anna Lisa Amadori

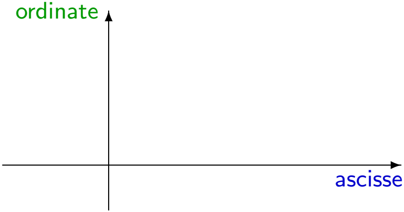
annalisa.amadori@uniparthenope.it

Università di Napoli "Parthenope"

a.a. 2019/20

Il piano Cartesiano

Il prodotto cartesiano $\boxed{\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \,:\, x, y \in \mathbb{R}\}}$ è costituito dalle coppie di numeri reali.
Si rappresenta con un piano in cui abbiamo fissato due rette perpendicolari (corrispondenti alle due copie di $\mathbb{R}$) che si incontrano nell'origine.
La retta orizzontale viene chiamata asse x o **asse delle ascisse**.
La retta verticale è detta asse y o **asse delle ordinate**.



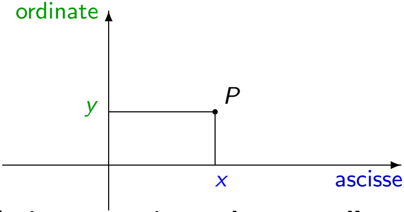
Il piano Cartesiano

Il prodotto cartesiano $\boxed{\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \ : \ x, y \in \mathbb{R}\}}$ è costituito dalle coppie di numeri reali.

Si rappresenta con un piano in cui abbiamo fissato due rette perpendicolari (corrispondenti alle due copie di $\mathbb{R}$) che si incontrano nell'origine.

La retta orizzontale viene chiamata asse x o **asse delle ascisse**.

La retta verticale è detta asse y o **asse delle ordinate**.



Ad ogni punto P del piano associamo **due coordinate cartesiane**

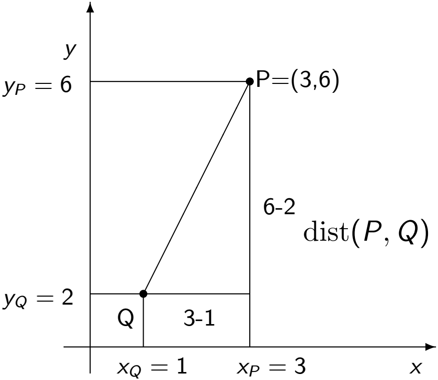
$$P = (x, y)$$

- La coordinata x corrisponde alla posizione della proiezione ortogonale di P sull'asse delle ascisse.
- y è la posizione della proiezione ortogonale di P sull'asse delle ordinate.

Distanza

Dati due punti $P = (x_p, y_p)$, $Q = (x_q, y_q)$ si definisce **distanza euclidea** tra P e Q la quantità

$$\mathrm{dist}(P, Q) = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2}$$



$$\mathrm{dist}(P, Q) = \sqrt{(6-2)^2 + (3-1)^2} = 2\sqrt{5}$$

Distanza

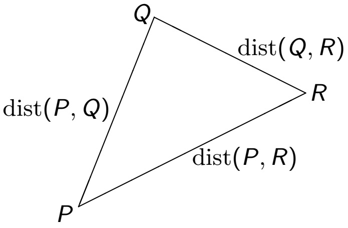
Dati due punti $P = (x_p, y_p)$, $Q = (x_q, y_q)$ si definisce **distanza euclidea** tra P e Q la quantità

$$\mathrm{dist}(P, Q) = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2}$$

Proprietà :

$\forall P, Q, R \in \mathbb{R}^2$ si ha

1. $\mathrm{dist}(P, Q) \geq 0$ e $\mathrm{dist}(P, Q) = 0$ se, e solo se, $P = Q$
2. $\mathrm{dist}(P, Q) = \mathrm{dist}(Q, P)$
3. $\mathrm{dist}(P, Q) \leq \mathrm{dist}(P, R) + \mathrm{dist}(Q, R)$ disuguaglianza triangolare

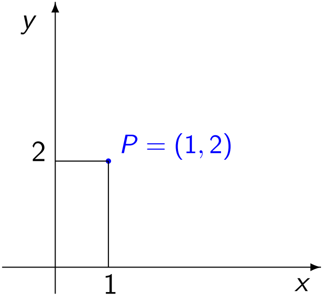


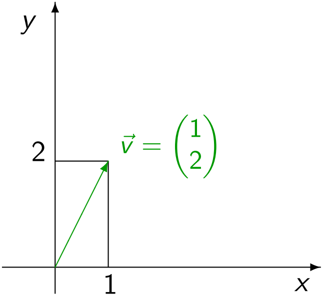
Lo Spazio Vettoriale V^2

Nell'insieme $\mathbb{R}^2$ possiamo definire una somma e un prodotto che rispecchiano le proprietà delle leggi di composizione delle forze fisiche, introducendo così una struttura di **spazio vettoriale**

$$V^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ : \ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R} \right\}.$$

- Un elemento $P = (x, y)$ di $\mathbb{R}^2$ è un punto P del piano di coordinate x e y.
- Un elemento $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ di V^2 è un vettore che parte dall'origine degli assi e termina nel punto $P = (x, y)$.





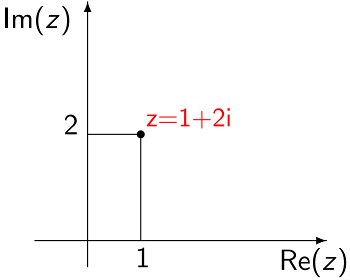
Piano di Gauss o Piano Complesso

Nell'insieme $\mathbb{R}^2$ possiamo definire un altro tipo di somma e prodotto e introdurre in tal modo i **numeri complessi**

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy \ : \ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}\,.$$

- Un elemento $z = x + iy$ di $\mathbb{C}$ è un numero complesso che ha x come parte reale e y come parte immaginaria.

Il numero z è univocamente determinato dalla coppia (x, y) e possiamo pensare a questa coppia come a coordinate di un punto in un piano.



$1 + 2i$ è rappresentato

nel piano di Gauss

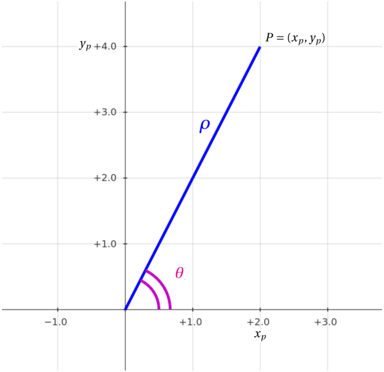
dal punto di coordinate $(1, 2)$.

Osservazione La parte reale e la parte immaginaria sono entrambe dei numeri reali

Coordinate polari

Finora nell'insieme $\mathbb{R}^2$ abbiamo indicato i punti (e dunque anche i vettori e i numeri complessi) con le loro coordinate cartesiane. Talvolta è più comodo farlo mediante le **coordinate polari**.

$P = (x_p, y_p) \in \mathbb{R}^2$
$\rho = \mathrm{dist}(P, O)$
θ angolo fra semiasse delle x positive e semiretta che congiunge l'origine con P

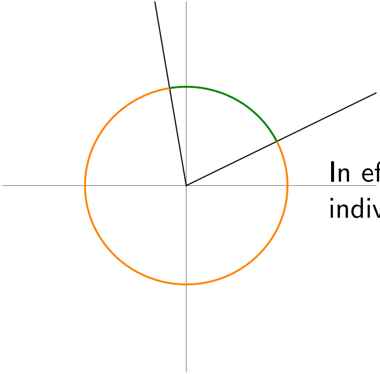


Allora le coordinate polari del punto P sono (ρ, θ).

Angoli

Angolo

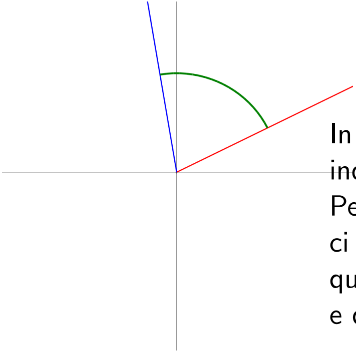
è una porzione di piano racchiusa fra due semirette con l'origine in comune (il vertice).



In effetti le due semirette individuano due angoli α e β.

Angolo

è una porzione di piano racchiusa fra due semirette con l'origine in comune (il vertice).



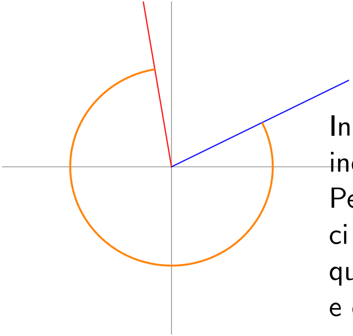
In effetti le due semirette individuano due angoli α e β.
Per precisare a quale angolo ci riferiamo, dobbiamo specificare qual è il primo lato e quale il secondo lato.

Intendiamo così l'angolo spazzato dal primo lato per sovrapporsi al secondo lato **ruotando in senso antiorario** (angolo positivamente orientato)

Angoli

Angolo

è una porzione di piano racchiusa fra due semirette con l'origine in comune (il vertice).



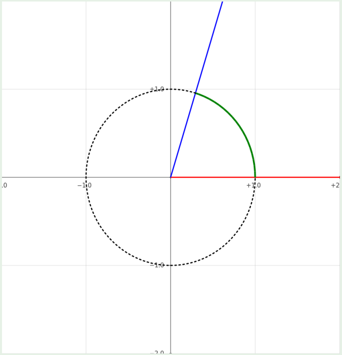
In effetti le due semirette individuano due angoli α e β.
Per precisare a quale angolo ci riferiamo, dobbiamo specificare qual è il primo lato e quale il secondo lato.

Intendiamo così l'angolo spazzato dal primo lato per sovrapporsi al secondo lato **ruotando in senso antiorario** (angolo positivamente orientato)

Angoli

Misura dell'angolo in radianti

Fissiamo nel piano un riferimento cartesiano e tracciamo la **circonferenza unitaria**.



Riportiamo l'angolo in modo che il vertice coincida con l'origine ed il primo lato con la semiretta delle x positive.

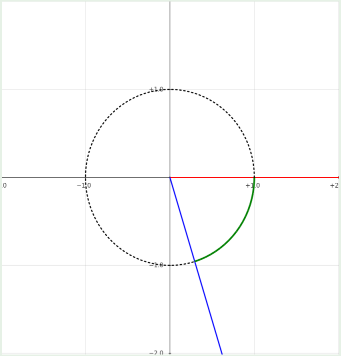
La misura dell'angolo in radianti è la lunghezza dell'arco di circonferenza intercettato.

misura positiva = angolo orientato in senso antiorario,
misura negativa = angolo orientato in senso orario.

Angoli

Misura dell'angolo in radianti

Fissiamo nel piano un riferimento cartesiano e tracciamo la **circonferenza unitaria**.



Riportiamo l'angolo in modo che il vertice coincida con l'origine ed il primo lato con la semiretta delle x positive.

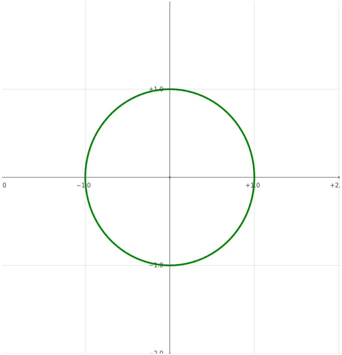
La misura dell'angolo in radianti è la lunghezza dell'arco di circonferenza intercettato.

misura positiva $=$ angolo orientato in senso antiorario,
misura negativa $=$ angolo orientato in senso orario.

Angoli

Angoli: radianti e gradi

La misura dell'angolo in radianti è la lunghezza dell'arco di circonferenza intercettatto.



In tal modo, l'**angolo giro** corrisponde alla lunghezza della circonferenza, cioè 2π.

Poiché l'angolo giro misura 360^o, possiamo impostare il rapporto

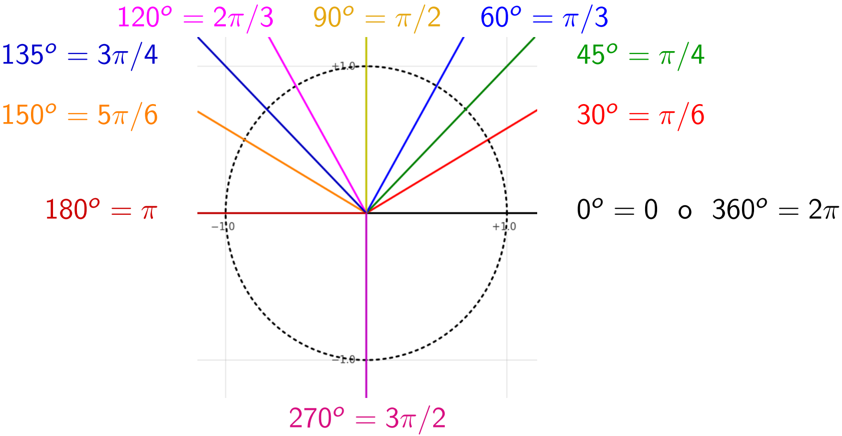
$$\alpha_g : 360 = \alpha_r : 2\pi$$

da cui le equivalenze

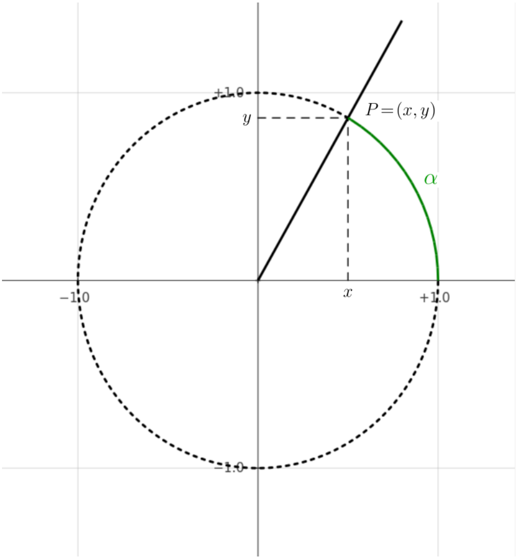
$$\boxed{\alpha_r = \frac{\pi}{180}\alpha_g} \qquad \text{o} \qquad \boxed{\alpha_g = \frac{180}{\pi}\alpha_r}$$

Angoli

Riportiamo in un diagramma le misure degli angoli più usati:

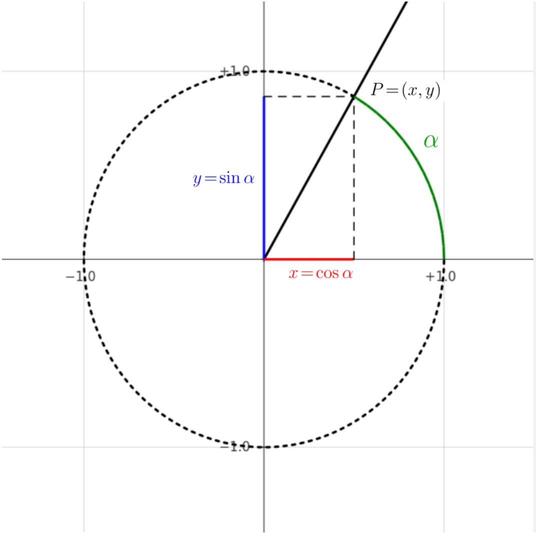


Funzioni trigonometriche



Abbiamo visto che nel riferimento cartesiano si puó assegnare un **angolo** α indicando le **coordinate del punto** $P = (x, y)$ intercettato dal secondo lato sulla circonferenza unitaria.

Funzioni trigonometriche

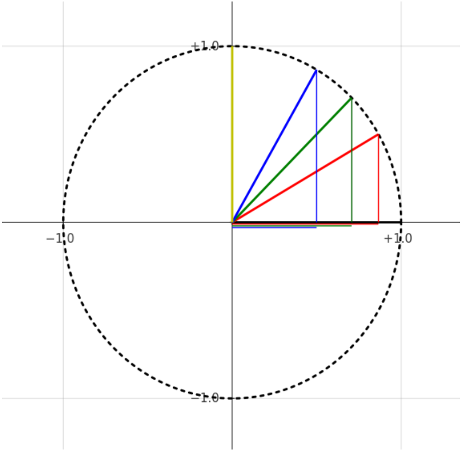


Definizione

Definiamo coseno di un angolo α ($\cos\alpha$) l'ascissa x di P.
Definiamo seno di un angolo α ($\sin\alpha$) l'ordinata y di P.

Seno e coseno

Valori di coseno e seno da ricordare:



$\cos 0 = 1 \qquad \sin 0 = 0$

$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

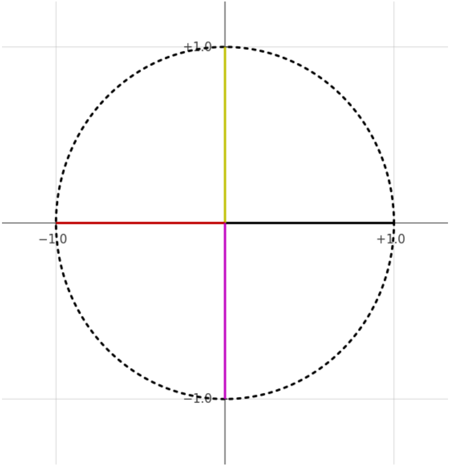
$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \quad \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos \frac{\pi}{2} = 0 \quad \sin \frac{\pi}{2} = 1$

Seno e coseno

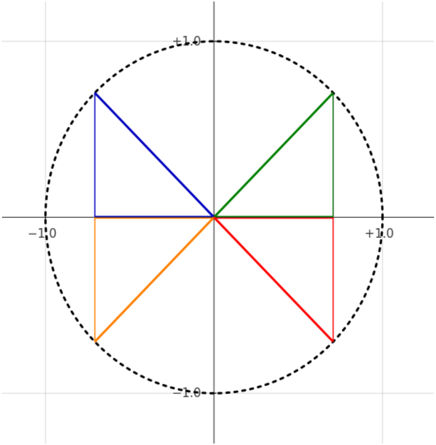
Per simmetria si ricava:



$$
\begin{array}{ll}
\cos 0 = 1 & \sin 0 = 0 \\
\cos \frac{\pi}{2} = 0 & \sin \frac{\pi}{2} = 1 \\
\cos \pi = -1 & \sin \pi = 0 \\
\cos \frac{3\pi}{2} = 0 & \sin \frac{3\pi}{2} = -1 \\
\cos 2\pi = 1 & \sin 2\pi = 0
\end{array}
$$

Seno e coseno

Per simmetria si ricava:



$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

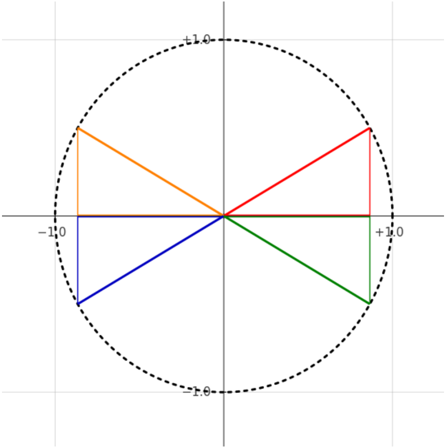
$$\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sin\frac{7\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Seno e coseno

Per simmetria si ricava:



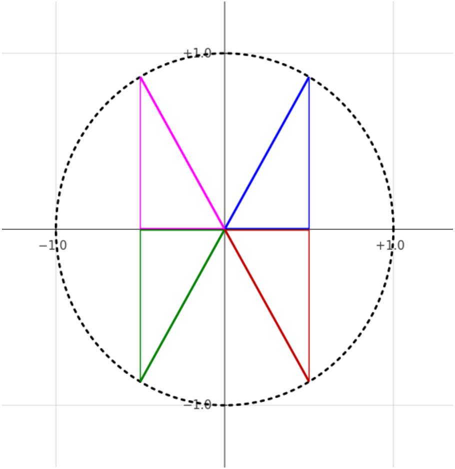
$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$\cos\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

$\cos\frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sin\frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

Per simmetria si ricava:



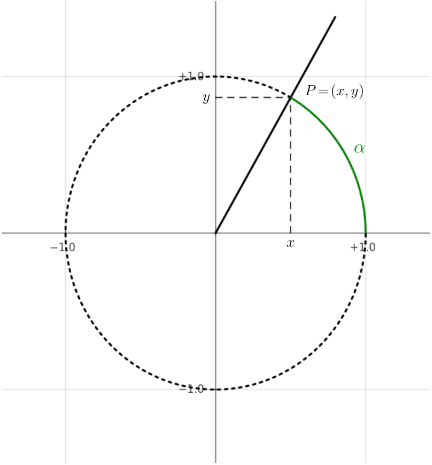
$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ $\quad$ $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ $\quad$ $\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ $\quad$ $\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$ $\quad$ $\sin\frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Seno e coseno



Percorrendo la circonferenza (in senso antiorario o orario), dopo un angolo 2π ci ritroviamo al punto iniziale.
Gli angoli α, $\alpha+2\pi$, $\alpha-2\pi$, ... $\alpha+2k\pi$ con $k\in\mathbb{Z}$ rappresentano lo stesso punto sulla circonferenza.

$$\boxed{\sin(\alpha+2k\pi)=\sin\alpha \quad \forall k\in\mathbb{Z}}$$

$$\boxed{\cos(\alpha+2k\pi)=\cos\alpha \quad \forall k\in\mathbb{Z}}$$

Diremo che seno e coseno hanno periodo 2π.

Seno e coseno

Proprietà di seno e coseno:

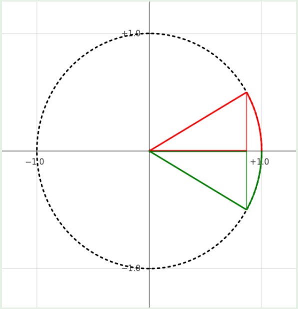
$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall k \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{-1 \le \sin\alpha \le 1} \qquad \boxed{-1 \le \cos\alpha \le 1}$$

$$\boxed{\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha} \qquad \boxed{\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha}$$

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

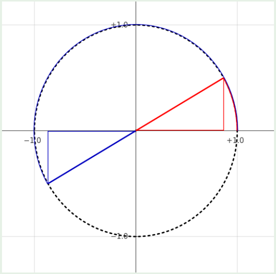
Simmetrie



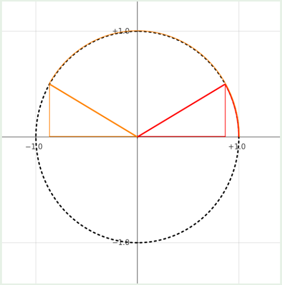
$$\boxed{\sin(-\alpha) = -\sin\alpha}$$

$$\boxed{\cos(-\alpha) = \cos\alpha}$$

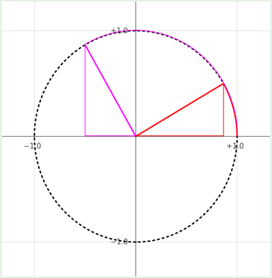
Simmetrie



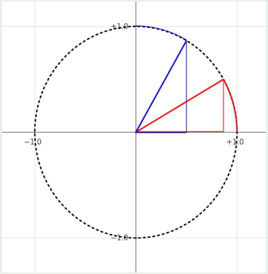
$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$,
$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$,



$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$,
$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$



$\cos(\pi/2 + \alpha) = -\sin\alpha$
$\sin(\pi/2 + \alpha) = \cos\alpha$



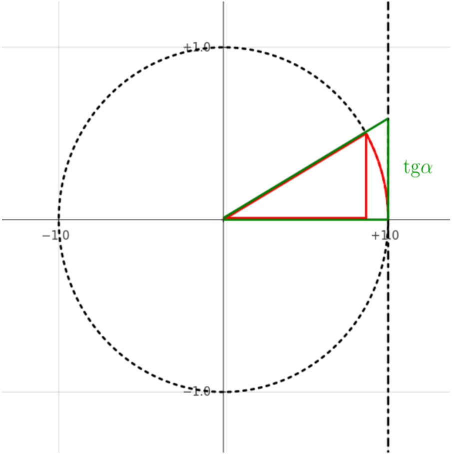
$\cos(\pi/2 - \alpha) = \sin\alpha$
$\sin(\pi/2 - \alpha) = \cos\alpha$

Tangente

Definizione

La tangente *di α ($\mathrm{tg}\alpha$) è il rapporto fra seno e coseno*

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

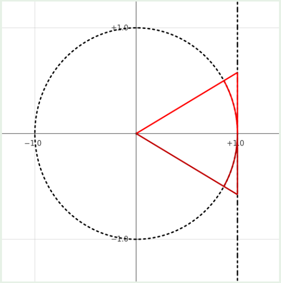


Geometricamente, la tangente rappresenta la lunghezza del segmento intercettato dall'angolo α sulla retta verticale $x = 1$.
È definita per $\alpha \neq \pi/2 + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.
Ha periodo π:

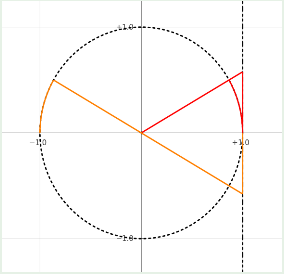
$$\boxed{\mathrm{tg}(\alpha + k\pi) = \mathrm{tg}\alpha \quad \forall k \in \mathbb{Z}}$$

Tangente

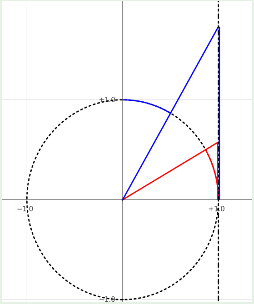
Simmetrie



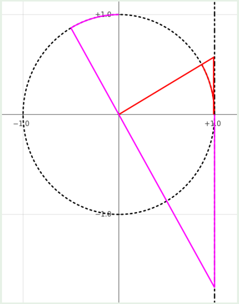
$\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$



$\mathrm{tg}(\pi - \alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$



$\mathrm{tg}(\frac{\pi}{2} - \alpha) = 1/\mathrm{tg}\alpha$



$\mathrm{tg}(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -1/\mathrm{tg}\alpha$

Formule di addizione

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\ \cos\beta + \cos\alpha\ \sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\ \cos\beta - \sin\alpha\ \sin\beta$$

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{1 - \mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}$$

Formule di addizione

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\,\cos\beta + \cos\alpha\,\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\,\sin\beta$$

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{1 - \mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}$$

Da queste, scegliendo $\beta = \alpha$, otteniamo

Formule di duplicazione

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\,\cos\alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\mathrm{tg}(2\alpha) = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}$$

Formule di addizione

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\,\cos\beta + \cos\alpha\,\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\,\sin\beta$$

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{1 - \mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}$$

Da queste, scegliendo $\beta = \alpha$, otteniamo

Formule di duplicazione

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\,\cos\alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\mathrm{tg}(2\alpha) = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}$$

Sostituendo $-\beta$ al posto di β otteniamo poi

Formule di sottrazione

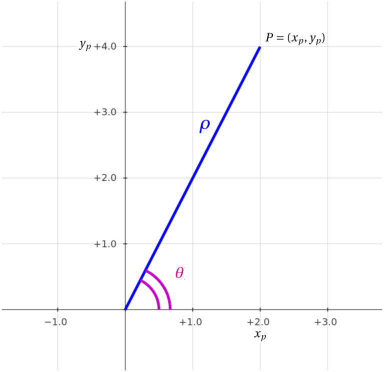
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\,\cos\beta - \cos\alpha\,\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\,\cos\beta + \sin\alpha\,\sin\beta$$

$$\mathrm{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta}{1 + \mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}$$

Torniamo alle coordinate polari

$P = (x_p, y_p) \in \mathbb{R}^2$ in coordinate cartesiane
modulo $\rho = \mathrm{dist}(P, O)$
argomento θ è l'angolo fra il semiasse delle x positive e la semiretta che congiunge l'origine con P
Allora $P = (\rho, \theta)$ in coordinate polari.



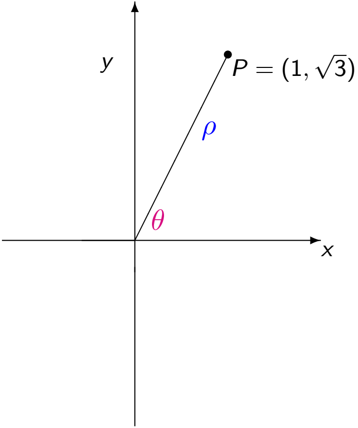
Come si calcolano, conoscendo le coordinate cartesiane $P = (x_p, y_p)$?

$$\rho = \mathrm{dist}(P, O) = \sqrt{x_p^2 + y_p^2} \qquad \mathrm{tg}\theta = \frac{y_p}{x_p}$$

Attenti: nell'arco $[0, 2\pi)$ ci sono due angoli che soddisfano la richiesta $\mathrm{tg}\vartheta = y_p/x_p$!

Esempio

Scriviamo le coordinate polari del punto $P = (1, \sqrt{3})$.

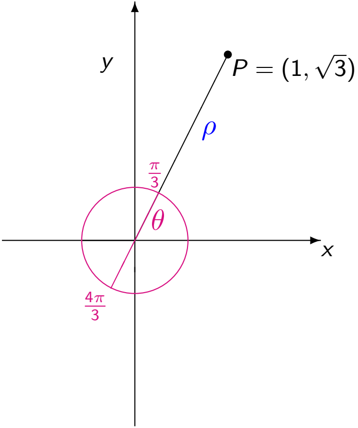


$$\rho = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}, \qquad \theta = \frac{\pi}{3} \ \text{ o } \ \frac{4\pi}{3}?$$

Esempio

Scriviamo le coordinate polari del punto $P = (1, \sqrt{3})$.



$$\rho = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}, \qquad \theta = \frac{\pi}{3} \text{ o } \frac{4\pi}{3}?$$

$\frac{\pi}{3}$ è nel 1^o quadrante: sin e cos positivi

$\frac{4\pi}{3}$ è nel 3^o quadrante: sin e cos negativi

dunque $\theta = \frac{\pi}{3}$

Passaggio di coordinate

Possiamo passare da coordinate polari a coordinate cartesiane e viceversa usando le formule

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x_P^2 + y_P^2}, \\ \\ \mathrm{tg}\theta = \dfrac{y_P}{x_P} \quad \text{se } \; x_P \neq 0 \; \text{ o } \theta = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3}{2}\pi \end{cases} \qquad \begin{cases} x_P = \rho \cos\theta, \\ \\ y_P = \rho \,\mathrm{sen}\theta \end{cases}$$

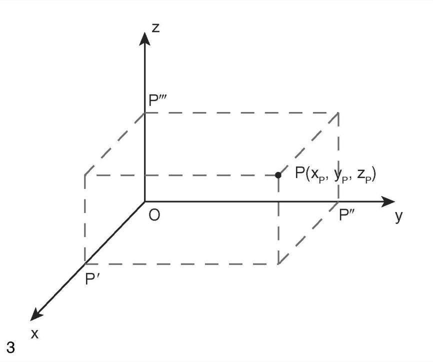
Stando sempre attenti a scegliere l'angolo ϑ tenendo conto dei segni di x e y!

Ad esempio, nel caso in cui $x_P = 0$

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} \text{ se } y_P > 0, \text{ mentre } \vartheta = \frac{3}{2}\pi \text{ se } y_P < 0.$$

Generalizzazione: lo spazio cartesiano

Il prodotto cartesiano $\boxed{\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}}$ è costituito dalle terne di numeri reali.
Si rappresenta con uno spazio tridimensionale in cui abbiamo fissato tre rette perpendicolari (corrispondenti alle tre copie di $\mathbb{R}$) che si incontrano nell'origine.
Nel piano orizzontale poniamo una copia del piano cartesiano, con i suoi assi x e y.
La retta verticale è detta asse z ed è perpendicolare sia all'asse x che all'asse y.



$$x_p = |OP'|$$
$$y_p = |OP''|$$
$$z_p = |OP'''|$$

Distanza

Dati due punti $P = (x_p, y_p, z_p)$, $Q = (x_q, y_q, z_q)$ si definisce **distanza euclidea** tra P e Q la quantità

$$\mathrm{dist}(P, Q) = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 + (z_p - z_q)^2}$$

La distanza in $\mathbb{R}^3$ ha esattamente le stesse proprietà che in $\mathbb{R}^2$:

Proprietà :

$\forall P, Q, R \in \mathbb{R}^3$ si ha

1. $\mathrm{dist}(P, Q) \geq 0$ e $\mathrm{dist}(P, Q) = 0$ se, e solo se, $P = Q$
2. $\mathrm{dist}(P, Q) = \mathrm{dist}(Q, P)$
3. $\mathrm{dist}(P, Q) \leq \mathrm{dist}(P, R) + \mathrm{dist}(Q, R)$ disuguaglianza triangolare

Come definireste lo spazio cartesiano $\mathbb{R}^7$?
E la distanza euclidea fra punti di $\mathbb{R}^7$?
Che proprietà vi aspettate? Come le dimostrereste?

Lo Spazio Vettoriale V^3

Nell'insieme $\mathbb{R}^3$ possiamo definire una somma e un prodotto che rispecchiano le proprietà delle leggi di composizione delle forze fisiche, introducendo così una struttura di **spazio vettoriale**

$$V^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

- Un elemento $P = (x, y, z)$ di $\mathbb{R}^3$ è un punto P di coordinate x, y e z.
- Un elemento $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ di V^3 è un vettore che parte dall'origine degli assi e termina nel punto $P = (x, y, y)$.

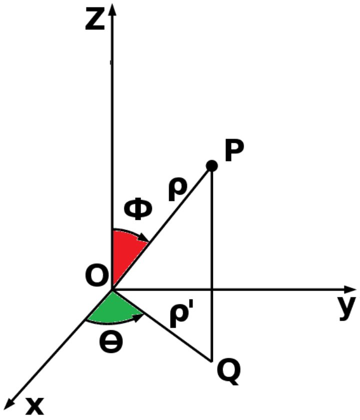
Coordinate sferiche

Anche nello spazio possiamo introdurre il corrispondente dellle coordinate polari, sono dette **coordinate sferiche**.
Dato un punto $P = (x_p, y_p, z_p) \in \mathbb{R}^3$ indichiamo con $Q = (x_p, y_p, 0)$ la proiezione di P sul piano x, y, poi

$\rho = \mathrm{dist}(P, O)$

Nel piano x, y, $\theta \in [0, 2\pi)$ è l'angolo fra il semiasse delle x positive e la semiretta che congiunge l'origine con Q

Nel semipiano che contiene l'asse z e il punto P, $\phi \in [0, \pi]$ è l'angolo fra il semiasse delle z positive e la semiretta che congiunge l'origine con P



Allora le coordinate sferiche del punto P sono (ρ, θ, ϕ).

Passaggio di coordinate

Possiamo passare da coordinate sferiche a coordinate cartesiane e viceversa usando le formule

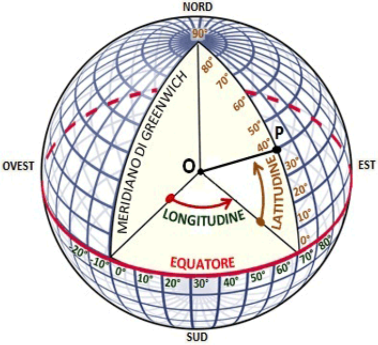
$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x_P^2 + y_P^2 + z_P^2}, \\ \mathrm{tg}\theta = \dfrac{y_P}{x_P} & \text{se } \ x_P \neq 0 \text{ altrimenti } \theta = \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi \\ \cos\varphi = \dfrac{z_P}{\sqrt{x_P^2 + y_P^2 + z_p^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_P = \rho \sin\varphi \cos\theta, \\ y_P = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z_P = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

Coordinate geografiche

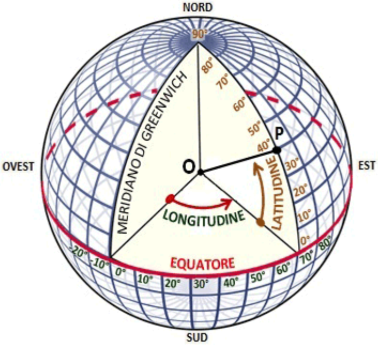
In geodesia si usano le **coordinate geografiche**, che sono una variazione delle coordinate sferiche.
Si posiziona il sistema di riferimento cartesiano in modo che il piano x, y coincida con il *piano equatoriale*, e che il semiasse positivo delle x incontri la superficie terrestre in corrispondenza del *meridiano di Greenwich*. In tal modo il semiasse positivo delle z incontra la superficie terrestre in corrispondenza del *polo Nord*.
Per ogni punto P sulla superficie terrestre, si "traccia" la semicirconferenza che unisce i due poli e passa per P (*meridiano*) e si indica con P^* l'intersezione con l'*equatore*. Poi

Nel piano x, y, la **longitudine** $\theta \in [0, 360^o)$ è l'angolo fra il semiasse delle x positive e la semiretta OP^*.
Nel semipiano che contiene l'asse z e il punto P, la **latitudine** $\varphi \in [-90^o, 90^o]$ è l'angolo fra le semirette OP e OP^*.
Allora le coordinate geografiche del punto P sono (θ, ϕ).



Coordinate geografiche

Nel piano x, y, la **longitudine** $\theta \in [0, 360^o)$ è l'angolo fra il semiasse delle x positive e la semiretta OP^*.
Nel semipiano che contiene l'asse z e il punto P, la **latitudine** $\phi \in [-90^o, 90^o]$ è l'angolo fra le semirette OP e OP^*.
Allora le coordinate geografiche del punto P sono (θ, φ).



Attenzione Latitudine e longitudine si misurano in gradi, mentre gli angoli sferici di solito si misurano in radianti.
Spesso le latitudini sono indicate come N/S anziché $+/-$.
Talvolta si aggiunge una terza coordinata **altitudine h**, che misura l'altezza sul livello del mare ed è collegata al modulo ρ.
La relazione fra coordinate sferiche e geografiche è:

$$\begin{cases} \theta_g = \frac{180^o}{\pi}\theta_s \\ \phi_g = \frac{180^o}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \phi_s\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} \theta_s = \frac{\pi}{180^o}\theta_g \\ \phi_s = \frac{\pi}{180^o}\left(\phi_g + 90^o\right) \end{cases}$$