Preliminari al corso di Analisi Matematica 1

Anna Lisa Amadori

annalisa.amadori@uniparthenope.it

Università di Napoli "Parthenope"

a.a. 2019/20

Un po' di vocabolario

- Un **predicato** o **proprietà** è una frase che contiene una o più variabili.
  La sua verità dipende dal valore assunto dalle variabili.
- Una **proposizione** è una frase che afferma una proprietà: essa contiene, oltre alle variabili, i cosiddetti **quantificatori**.
  Può essere vera o falsa.

Esempio 1. Il numero naturale n è dispari

è un predicato.
Possiamo dire se è vera o falsa? Dipende dal valore che attribuiamo a n.

Un po' di vocabolario

- Un **predicato** o **proprietà** è una frase che contiene una o più variabili.
  La sua verità dipende dal valore assunto dalle variabili.
- Una **proposizione** è una frase che afferma una proprietà: essa contiene, oltre alle variabili, i cosiddetti **quantificatori**.
  Può essere vera o falsa.

Esempio 2. Esiste un numero naturale dispari

è una proposizione.
È vera in quanto il numero naturale 3 è dispari.

Esempio 3. Ogni numero naturale è dispari

è una proposizione.
È falsa in quanto il numero naturale 2 non è dispari

Un po' di vocabolario

- Un **predicato** o **proprietà** è una frase che contiene una o più variabili.
  La sua verità dipende dal valore assunto dalle variabili.
- Una **proposizione** è una frase che afferma una proprietà: essa contiene, oltre alle variabili, i cosiddetti **quantificatori**.
  Può essere vera o falsa.

Esempio 1. **Il numero naturale n è dispari**
Esempio 2. **Esiste un numero naturale dispari**
Esempio 3. **Ogni numero naturale è dispari**

Quantificatori

Nelle proposizioni, a differenza dei predicati, sono presenti i quantificatori:
$\forall$ (**per ogni** o **qualunque**) quantificatore **universale**,
$\exists$ (**esiste**) quantificatore **esistenziale**.

- Quando si vuole provare che una certa proprietà vale per tutti i numeri reali ($\forall x \in \mathbb{R}$), bisognerà prendere in considerazione un **generico** numero x e vedere se tale proprietà è soddisfatta da x. Quando diciamo generico, intendiamo un numero **NON noto**. Per questo motivo lo chiamiamo x, perché potrebbe essere 3, $-\sqrt{2}$ o $\pi/2$ (o qualsiasi altro numero), NON lo sappiamo!

Esempio 4. Tutti i numeri positivi sono maggiori di -1

Quest'affermazione è vera poiché $\forall\ x > 0$ risulta $x > 0 > -1$.

Quantificatori

Nelle proposizioni, a differenza dei predicati, sono presenti i quantificatori:
$\forall$ (**per ogni** o **qualunque**) quantificatore **universale**,
$\exists$ (**esiste**) quantificatore **esistenziale**.

- Quando si vuole provare che una certa proprietà vale per tutti i numeri reali ($\forall x \in \mathbb{R}$), bisognerà prendere in considerazione un **generico** numero x e vedere se tale proprietà è soddisfatta da x.
- Se si vuol provare che una certa proprietà **NON** è soddisfatta da **tutti** i numeri reali basterà far vedere che **esiste** un numero che non la soddisfa, cioè basterà trovare un numero particolare (scelto da noi, quindi questa volta conosciuto!) che non ha la proprietà in questione.

Esempio 5. Tutti i numeri reali sono positivi

Quest'affermazione è falsa poiché $\exists\ x = -1$ che è negativo.

Congiunzioni e disgiunzioni

Nelle proposizioni troviamo congiunzioni o disgiunzioni.
La congiunzione più usata è **e**.
La disgiunzione più frequente è **o**.

- Una proposizione formata da due frasi legate da **e** è vera se e solo se sono vere **entrambe** le frasi.
- Una proposizione in cui sono presenti due frasi legate da un **o** è vera non appena è vera **almeno una** delle due frasi contenute.

Esempio 6.

$2+2=4$ e $3+3=6$ è vera $2+2=4$ o $3+3=6$ è vera
$2+2=4$ e $3+3=5$ è falsa $2+2=4$ o $3+3=5$ è vera

Insieme

è una collezione di oggetti per cui è stata fissata in modo inequivoco una legge di appartenenza.

$x \in A$ si legge "x è un elemento dell'insieme A"
o anche "x appartiene ad A".
$x \notin A$ si legge "x non è un elemento dell'insieme A"
o anche "x non appartiene ad A".

Indichiamo con $\emptyset$ l'insieme privo di elementi.

La legge può essere precisata **elencando** gli elementi:

$$\mathbb{P} = \{2, 4, 6, \dots\},$$

oppure esprimendo una **proprietà**:

$$\mathbb{P} = \{n \in \mathbb{N} \;:\; n \text{ è divisibile per } 2\}.$$

Il linguaggio degli nsiemi

Insieme

è una collezione di oggetti per cui è stata fissata in modo inequivoco una legge di appartenenza.

$x \in A$ si legge "x è un elemento dell'insieme A"
o anche "x appartiene ad A".
$x \notin A$ si legge "x non è un elemento dell'insieme A"
o anche "x non appartiene ad A".

Indichiamo con $\emptyset$ l'insieme privo di elementi.

Relazioni fra insiemi

Inclusione: $A \subset B$ se $\forall x \in A,\ x \in B$.

Certamente $\emptyset \subset A$ per qualunque insieme A.

Se $A \subset B$ e $B \subset A$ allora $A = B$

Insiemi

Operazioni fra insiemi

Unione: $A \cup B = \{x \, : \, x \in A \textbf{ o } x \in B\}$.

Intersezione: $A \cap B = \{x \, : \, x \in A \textbf{ e } x \in B\}$.

Se $A \cap B = \emptyset$ (cioè A e B non hanno alcun elemento in comune), diciamo che A e B sono disgiunti.

Operazioni fra insiemi

Unione: $A \cup B = \{x : x \in A \textbf{ o } x \in B\}$.

Intersezione: $A \cap B = \{x : x \in A \textbf{ e } x \in B\}$.

Se $A \cap B = \emptyset$ (cioè A e B non hanno alcun elemento in comune), diciamo che A e B sono disgiunti.

In altre parole, date due proprietà $\mathcal{P}(x)$, $\mathcal{Q}(x)$

- L'insieme delle x che verificano la proprietà $\mathcal{P}(x)$ **o** $\mathcal{Q}(x)$ è l'**unione** delle x che verificano $\mathcal{P}(x)$ e di quelle che verificano $\mathcal{Q}(x)$.
- L'insieme delle x che verificano la proprietà $\mathcal{P}(x)$ **e** $\mathcal{Q}(x)$ è l'**intersezione** fra le x che verificano $\mathcal{P}(x)$ e quelle che verificano $\mathcal{Q}(x)$.
  Se questo insieme è vuoto, diciamo che le due proprietà sono mutualmente esclusive, perché non sono mai soddisfatte contemporaneamente.

Insiemi

Operazioni fra insiemi

Unione: $A \cup B = \{x \, : \, x \in A \textbf{ o } x \in B\}$.

Intersezione: $A \cap B = \{x \, : \, x \in A \textbf{ e } x \in B\}$.

Insieme complementare: $A^C = \{x \, : \, x \notin A\}$.

Differenza: $A \setminus B = \{x \, : \, x \in A \textbf{ e } x \notin B\} = A \cap B^C$.

Prodotto cartesiano: $A \times B = \{(x, y) \, : \, x \in A \textbf{ e } y \in B\}$.

Negazioni

La **negazione** di una proposizione A è la proposizione (**non** A o $\neg A$) che è vera quando A è falsa, e viceversa falsa quando A è vera.

A : $\forall x$, $\mathcal{P}(x)$ vero
"per ogni valore di x vale la proprietà $\mathcal{P}(x)$"

$\neg A$: $\exists x$, $\mathcal{P}(x)$ falso
"esiste un valore di x per cui non vale la proprietà $\mathcal{P}(x)$"

B : $\exists x$, $\mathcal{P}(x)$ vero
"esiste un valore di x per cui vale la proprietà $\mathcal{P}(x)$"

$\neg B$: $\forall x$, $\mathcal{P}(x)$ falso
"per ogni valore di x non vale la proprietà $\mathcal{P}(x)$"

Per negare il "per ogni" dobbiamo usare "esiste", mentre per negare "esiste" dobbiamo usare il "per ogni".

Negazioni

La **negazione** di una proposizione A è la proposizione (**non** A o $\neg A$) che è vera quando A è falsa, e viceversa falsa quando A è vera.

Allo stesso modo se in una proposizione è presente un "e" nella negazione otteniamo un "o" e viceversa.

A : "Tutti i sabato vado al cinema e in pizzeria"
$\neg A$: "Esiste un sabato in cui non vado al cinema o in pizzeria"

Esercizio

Indicare qual è la negazione dell'affermazione

"Umberto ha almeno un figlio biondo"

1. Tutti i figli di Umberto sono bruni
2. Almeno un figlio di Umberto non è biondo
3. Nessun figlio di Umberto è biondo
4. Non tutti i figli di Umberto sono biondi
5. Umberto non ha figli

Esercizio

Indicare qual è la negazione dell'affermazione

"Umberto ha almeno un figlio biondo"

1. Tutti i figli di Umberto sono bruni
2. Almeno un figlio di Umberto non è biondo
3. **Nessun figlio di Umberto è biondo**
4. Non tutti i figli di Umberto sono biondi
5. Umberto non ha figli

Esercizio

Indicare qual è la negazione dell'affermazione

"Tutti gli Italiani sono bassi e hanno gli occhi scuri"

1. Alcuni Italiani sono alti e biondi
2. Almeno un Italiano è alto e biondo
3. Tutti gli Italiani con gli occhi scuri sono alti
4. Alcuni Italiani bassi hanno gli occhi chiari
5. C'è almeno un Italiano che è alto, oppure ha gli occhi chiari

Esercizio

Indicare qual è la negazione dell'affermazione

"Tutti gli Italiani sono bassi e hanno gli occhi scuri"

1. Alcuni Italiani sono alti e biondi
2. Almeno un Italiano è alto e biondo
3. Tutti gli Italiani con gli occhi scuri sono alti
4. Alcuni Italiani bassi hanno gli occhi chiari
5. C'è almeno un Italiano che è alto, oppure ha gli occhi chiari

- Una **definizione** è una frase che spiega in modo **univoco** il significato di una parola o di un concetto.

Esempio 8.

Un numero razionale è un numero che si può scrivere come $x = p/q$ con p e q interi, $q \neq 0$.

- Un **Teorema** o **enunciato matematico** è formato da almeno due predicati e da una **implicazione logica**.
  Un predicato, detto **ipotesi**, svolge il ruolo di causa.
  L'altro predicato, detto **tesi**, ne è l'effetto.

Esempio 9.

Se due bimbi sono gemelli allora sono fratelli

ipotesi: "essere gemelli" **tesi:** "essere fratelli"
implicazione logica: "allora"

Poniamo, per brevità:

$$A: \text{“essere gemelli”}, \qquad B: \text{“essere fratelli”},$$

$\Longrightarrow$ l'implicazione logica: “allora” o “implica che”.

Esempio 9. $A \Longrightarrow B$

Si può leggere come

La proprietà di essere gemelli implica (causa, ha come conseguenza) essere fratelli,

se l'ipotesi di essere gemelli viene soddisfatta allora la tesi di essere fratelli sarà vera

essere gemelli è condizione sufficiente per essere fratelli

Che possiamo dire delle altre implicazioni?

implicazione diretta: $A \Longrightarrow B$

essere gemelli è condizione sufficiente per essere fratelli

implicazione controniversa: **non** $B \Longrightarrow$ **non** A**?**

Se due bambini non sono fratelli allora non sono gemelli?

SÍ, se B è falsa, allora anche A è falsa

essere fratelli è condizione necessaria per essere gemelli

Questo è sempre vero ed è noto come "legge della controinversa (o contronominale)".

implicazione diretta: $A \Longrightarrow B$

essere gemelli è condizione sufficiente per essere fratelli

implicazione controniversa: **non**$B \Longrightarrow$ **non**A

essere fratelli è condizione necessaria per essere gemelli

implicazione inversa: $B \Longrightarrow A$**?**

Se due bimbi sono fratelli allora sono gemelli?

NO, è possibile che A sia falsa anche se B è vera

essere fratelli non è condizione sufficiente per essere gemelli

implicazione diretta: $A \Longrightarrow B$

essere gemelli è condizione sufficiente per essere fratelli

implicazione controniversa: **non**$B \Longrightarrow$ **non**A

essere fratelli è condizione necessaria per essere gemelli

implicazione inversa: $B \Longrightarrow A$ <u>**NO**</u>

essere fratelli non è condizione sufficiente per essere gemelli

implicazione contraria: **non** $A \Longrightarrow$ **non** B**?**

Se due bambini non sono gemelli allora non sono fratelli?

NO, è possibile che B sia vera anche se A è falsa

essere gemelli non è condizione necessaria per essere fratelli

implicazione diretta: $A \Longrightarrow B$

essere gemelli è condizione sufficiente per essere fratelli

implicazione controniversa: **non** $B \Longrightarrow$ **non** A

essere fratelli è condizione necessaria per essere gemelli

implicazione inversa: $B \Longrightarrow A$ **NO**

essere fratelli non è condizione sufficiente per essere gemelli

implicazione contraria: **non** $A \Longrightarrow$ **non** B **NO**

essere gemelli non è condizione necessaria per essere fratelli

Nell'esempio A è condizione necessaria ma non sufficiente per B

Quando tutte e quattro le implicazioni sono vere diciamo che

coimplicazione: $A \Longleftrightarrow B$

A è condizione necessaria e sufficiente per B
A è vera se e solo se B è vera
A e B sono equivalenti

Esempio 10: condizione sufficiente

Se $x = 2$ allora $x^2 = 4$.

Nell'ipotesi vengono affermate le condizioni sufficienti a garantire che la tesi si avveri: è sufficiente che un numero x sia uguale a due affinché il suo quadrato sia uguale a quattro.

NON viene affermato che x^2 è uguale a quattro SOLTANTO se x è uguale a due (infatti $x^2 = 4$ anche quando $x = -2$)

Essere condizione sufficiente è DIVERSO dall'essere condizione necessaria.

Esempio 11: condizione sufficiente e necessaria

$|x| = 2$ se e solo se $x^2 = 4$.

In questo caso, avere valore assoluto due (cioè essere uguale a più o meno due) è una condizione sufficiente e necessaria per un numero x affinché il suo quadrato sia uguale a quattro.
Cioè

- $|x| = 2 \Longrightarrow x = \pm 2 \Longrightarrow x^2 = 4$

  E, VICEVERSA,

- $x^2 = 4 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \Longrightarrow |x| = |\pm 2| = 2$

Per dimostrare che vale una condizione sufficiente e necessaria bisogna verificare sia l'implicazione diretta che l'implicazione inversa.

Tecniche di dimostrazione

dimostrazione diretta

Partendo dal fatto che l'ipotesi è vera e usando altri teoremi dimostrati in precedenza (proprietà note) si deduce logicamente che la tesi è anch'essa vera

Esempio 12.

Dimostriamo che "Tutti i numeri positivi sono maggiori di -1"
ipotesi: ??? $\quad\Longrightarrow\quad$ tesi: ???

Tecniche di dimostrazione

dimostrazione diretta

Partendo dal fatto che l'ipotesi è vera e usando altri teoremi dimostrati in precedenza (proprietà note) si deduce logicamente che la tesi è anch'essa vera

Esempio 12.

Dimostriamo che "Tutti i numeri positivi sono maggiori di -1"
ipotesi: $x \in \mathbb{R},\ x > 0 \quad \Longrightarrow \quad$ tesi: $x > -1$

dimostrazione diretta

Partendo dal fatto che l'ipotesi è vera e usando altri teoremi dimostrati in precedenza (proprietà note) si deduce logicamente che la tesi è anch'essa vera

Esempio 12.

Dimostriamo che "Tutti i numeri positivi sono maggiori di -1"
ipotesi: $x \in \mathbb{R},\ x > 0 \quad \Longrightarrow \quad$ tesi: $x > -1$

Dimostrazione: So che $0 > -1$, dunque

$$\underset{\text{ipotesi}}{x > 0} \quad e \quad \underset{\text{noto}}{0 > -1} \quad \underset{\substack{\text{proprietà}\\ \text{transitiva}}}{\Longrightarrow} \quad \underset{\text{tesi}}{x > -1}$$

dimostrazione contronominale o controinversa

Si suppone che la tesi sia falsa, e si mostra attraverso passaggi logici che ANCHE l'ipotesi è falsa.

Per provare "$A \Longrightarrow B$", dimostriamo che "non $B \Longrightarrow$ non A"

Esempio 13.

Dimostriamo "I numeri dispari non sono divisibili per 4"
ipotesi: ??? $\qquad \Longrightarrow$
tesi: ???

dimostrazione contronominale o controinversa

Si suppone che la tesi sia falsa, e si mostra attraverso passaggi logici che ANCHE l'ipotesi è falsa.

Per provare "$A \implies B$", dimostriamo che "non $B \implies$ non A"

Esempio 13.

Dimostriamo "I numeri dispari non sono divisibili per 4"

ipotesi: $n \in \mathbb{N},\ \exists k \in \mathbb{N}\ : n = 2k + 1 \quad \implies$

tesi: $\nexists h \in \mathbb{N}\ : n = 4h$

Noi però dimostriamo "I numeri divisibili per 4 sono pari"

ipotesi: $n \in \mathbb{N},\ \exists h \in \mathbb{N}\ : n = 4h \quad \implies$

tesi: $\exists k \in \mathbb{N}\ : n = 2k$

dimostrazione contronominale o controinversa

Si suppone che la tesi sia falsa, e si mostra attraverso passaggi logici che ANCHE l'ipotesi è falsa.

Per provare "$A \Longrightarrow B$", dimostriamo che "non $B \Longrightarrow$ non A"

Esempio 13.

Dimostriamo "I numeri dispari non sono divisibili per 4"
ipotesi: $n \in \mathbb{N}, \ \exists k \in \mathbb{N} \ : n = 2k + 1 \quad \Longrightarrow$
tesi: $\nexists h \in \mathbb{N} \ : n = 4h$
Noi però dimostriamo "I numeri divisibili per 4 sono pari"
ipotesi: $n \in \mathbb{N}, \ \exists h \in \mathbb{N} \ : n = 4h \quad \Longrightarrow$
tesi: $\exists k \in \mathbb{N} \ : n = 2k$

Dimostrazione: Sappiamo che $4 = 2 \cdot 2$, dunque

$$n \underset{\text{ipotesi}}{=} 4 \cdot h \underset{\text{noto}}{=} 2 \cdot 2 \cdot h \underset{\substack{\text{proprietà} \\ \text{associativa}}}{=} 2 \cdot (2 \cdot h) \underset{\substack{2 \cdot h = k \\ \text{è intero}}}{=} \underset{\text{tesi}}{2 \cdot k}$$

dimostrazione per assurdo

Si suppone che l'ipotesi sia vera ma la tesi falsa, e si arriva ad una contraddizione (ad esempio che l'ipotesi è falsa)

Per provare "$A \Longrightarrow B$", dimostriamo che "A e non $B \Longrightarrow$ non A"

Esempio 13.

Dimostriamo "Non esiste un numero razionale il cui quadrato è 2"
ipotesi: ??? $\quad \Longrightarrow \quad$ tesi: ???

dimostrazione per assurdo

Si suppone che l'ipotesi sia vera ma la tesi falsa, e si arriva ad una contraddizione (ad esempio che l'ipotesi è falsa)

Per provare "$A \implies B$", dimostriamo che "A e non $B \implies$ non A"

Esempio 13.

Dimostriamo "Non esiste un numero razionale il cui quadrato è 2"

ipotesi: $x \in \mathbb{Q} \quad \implies \quad$ tesi: $x^2 \neq 2$

noi verifichiamo che

ipotesi (per ass.): $x \in \mathbb{Q}$ e $x^2 = 2 \quad \implies \quad$ tesi: $x \notin \mathbb{Q}$

Esempio 13.

ipotesi (per ass.): $x \in \mathbb{Q}$ e $x^2 = 2 \quad \Longrightarrow \quad$ tesi: $x \notin \mathbb{Q}$

Dimostrazione: Per definizione ogni numero razionale si può scrivere come rapporto $x = \frac{p}{q}$ e, dopo aver semplificato, p e q sono primi fra loro. Dunque

$$2 = x^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2}$$

e moltiplicando per q^2 il primo e l'ultimo membro si ha

$$2q^2 = p^2 \implies p \text{ è pari}$$

cioè $\exists k \in \mathbb{Z} \, : \, p = 2k$. Sostituiamo nell'uguaglianza precedente:

$$2q^2 = (2k)^2 = 4k^2$$

e dividendo per 2 il primo e l'ultimo membro si ha

$$q^2 = 2k^2 \implies \text{ è } q \text{ è pari}$$

Esempio 13.

ipotesi (per ass.): $x \in \mathbb{Q}$ e $x^2 = 2 \quad \Longrightarrow \quad$ tesi: $x \notin \mathbb{Q}$

Dimostrazione: Per definizione ogni numero razionale si può scrivere come rapporto $x = \frac{p}{q}$ e, dopo aver semplificato, **p e q sono primi fra loro**. Dunque

$$2 = x^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2}$$

e moltiplicando per q^2 il primo e l'ultimo membro si ha

$$2q^2 = p^2 \Longrightarrow p \textbf{ è pari}$$

cioè $\exists k \in \mathbb{Z} \ : \ p = 2k$. Sostituiamo nell'uguaglianza precedente:

$$2q^2 = (2k)^2 = 4k^2$$

e dividendo per 2 il primo e l'ultimo membro si ha

$$q^2 = 2k^2 \Longrightarrow \text{ è } q \textbf{ è pari}$$

Esercizio

Un accogliente cartello all'ingresso del ristorante L'Oca Giuliva recita:

Se si è in pochi, si mangia bene

Se si è in tanti, si spende poco

Il Signor Aquilotto, con la sua mente acuta, ne deduce logicamente che:

1. se si è pochi, si spende tanto
2. per mangiar bene è necessario andarci in pochi
3. se si mangia male non si è in pochi
4. per spendere poco bisogna essere in tanti
5. se si è in tanti, si mangia male.

Esercizio

Un accogliente cartello all'ingresso del ristorante L'Oca Giuliva recita:

Se si è in pochi, si mangia bene

Se si è in tanti, si spende poco

Il Signor Aquilotto, con la sua mente acuta, ne deduce logicamente che:

1. se si è pochi, si spende tanto
2. per mangiar bene è necessario andarci in pochi
3. **se si mangia male non si è in pochi**
4. per spendere poco bisogna essere in tanti
5. se si è in tanti, si mangia male.

Esercizio

Nel corso delle indagini su un assassinio, sono stati appurato questi due fatti:

- se X ha sparato alla vittima, allora X è mancino;
- se Y ha sparato alla vittima, allora Y è l'assassino.

Quale di queste deduzioni è corretta?

1. L'assassino ha sparato alla vittima
2. Poiché il signor Bianchi non è mancino, è innocente
3. Poiché il signor Rossi è mancino, è l'assassino
4. Poiché il signor Rossi è mancino, ha sparato alla vittima
5. Poiché il signor Bianchi non è mancino, non ha sparato alla vittima

Esercizio

Nel corso delle indagini su un assassinio, sono stati appurato questi due fatti:

- se X ha sparato alla vittima, allora X è mancino;
- se Y ha sparato alla vittima, allora Y è l'assassino.

Quale di queste deduzioni è corretta?

1. L'assassino ha sparato alla vittima
2. Poiché il signor Bianchi non è mancino, è innocente
3. Poiché il signor Rossi è mancino, è l'assassino
4. Poiché il signor Rossi è mancino, ha sparato alla vittima
5. **Poiché il signor Bianchi non è mancino, non ha sparato alla vittima**

Insiemi numerici

I numeri che servono per contare sono i numeri naturali:

Definizione

L'insieme dei numeri naturali ($\mathbb{N}$) *è definito mediante le proprietà*

- $0 \in \mathbb{N}$,
- *se* $n \in \mathbb{N}$, *allora* $n + 1 \in \mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

I numeri interi servono per fare il bilancio:

Definizione

L'insieme dei numeri interi ($\mathbb{Z}$) *è formato dai numeri naturali e dai loro opposti, cioè*

$$\mathbb{Z} = \{n : n \in \mathbb{N} \quad o \quad -n \in \mathbb{N}\} = \{\cdots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Osservazione Positivi sono i numeri maggiori di zero, negativi sono i numeri minori di zero, **0** non è né positivo né negativo!
Chiamiamo interi nonnegativi i numeri naturali $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ e interi positivi

$$\mathbb{Z}_+ = \{n \in \mathbb{Z} : n > 0\} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Insiemi numerici

Con i numeri interi possiamo fare ogni sorta di addizione e sottrazione, ad esempio:

$$4+(-7)=4-7=-3 \qquad 4-(-7)=4+7=11$$

Più precisamente, $\mathbb{Z}$ con l'operazione $+$ ha una struttura algebrica di **gruppo**, cioè valgono le

Proprietà della somma

$\forall x, y, z \in \mathbb{Z}$ si ha

1. proprietà associativa $\qquad (x+y)+z=x+(y+z)$
2. proprietà commutativa $\qquad x+y=y+x$
3. 0 è l'elemento neutro, cioè $\qquad x+0=x$
4. ogni numero x ammette un inverso (o opposto), cioè un numero $-x$ tale che $\qquad x+(-x)=0$

Insiemi numerici

Con i numeri interi non possiamo fare ogni sorta di divisione, ad esempio:

$$\begin{array}{ll} 4:2=2 & \text{ok} \\ 5:2=2,5 & \underline{\text{non}} \text{ è un num. intero} \\ 10:3=3,33333333\cdots & \underline{\text{non}} \text{ è un num. intero.} \end{array}$$

Tutti i possibili risultati delle divisioni fra numeri interi, cioè le frazioni, formano l'insieme dei numeri razionali:

Definizione

$$\mathbb{Q}=\left\{\tfrac{a}{b}=a:b \quad : \ a,b\in\mathbb{Z},\ b\neq 0\right\}$$

- *il numero a si dice numeratore*
- *b denominatore*

Osservazione Ogni numero **intero** è anche un numero **razionale**, il cui denominatore (sottinteso) è uguale a 1. Ad esempio

$$7=\frac{7}{1}$$

Definizione

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} = a : b \quad : \; a, b \in \mathbb{Z}, \; b \neq 0 \right\}$$

- *il numero a si dice numeratore*
- *b denominatore*

C'è una certa libertà sulla scelta dei segni di numeratore e denominatore. Ad esempio

$$-\frac{7}{3} = \frac{-7}{3} = \frac{7}{-3} \qquad \text{e} \qquad \frac{7}{3} = \frac{-7}{-3}$$

Definizione

Un numero razionale è
positivo se num. e den. hanno lo stesso segno $\quad (a \cdot b > 0)$
negativo se num. e den. hanno segno discorde $\quad (a \cdot b < 0)$

Definizione

$$\mathbb{Q} = \left\{ \tfrac{a}{b} = a : b \quad : \; a, b \in \mathbb{Z}, \; b \neq 0 \right\}$$

- *il numero a si dice* *numeratore*
- *b* *denominatore*

C'è libertà sulla scelta di numeratore e denominatore. Ad esempio

$$\frac{10}{5} = \frac{6}{3} = 2$$

Definizione

Due numeri razionali $\frac{a}{b}$ *e* $\frac{c}{d}$ *si dicono* *equivalenti* *se*

$$a \cdot d = b \cdot c$$

Possiamo scegliere una frazione fra tutte quelle equivalenti. Quale scegliamo? La più semplice: quella il cui numeratore non ha fattori comuni con il denominatore.

Ricordatevi di semplificare!

Definizione (somma di numeri razionali)

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$$

$\mathbb{Q}$ con l'operazione di somma è ancora un **gruppo**, cioè valgono le

Proprietà della somma

$\forall x, y, z \in \mathbb{Q}$ si ha

1. proprietà associativa $\quad (x + y) + z = x + (y + z)$
2. proprietà commutativa $\quad x + y = y + x$
3. 0 è l'elemento neutro, cioè $\quad x + 0 = x$
4. esiste l'inverso di x, cioè un numero $-x$ tale che $x + (-x) = 0$

L'inverso rispetto alla somma (o opposto) di $x = \frac{a}{b}$ si indica con il simbolo $-x$ e vale $-x = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$

$\mathbb{Q}$ si comporta meglio di $\mathbb{Z}$ rispetto al prodotto

Definizione (prodotto di numeri razionali)

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

$\mathbb{Q}$ con l'operazione $\cdot$ è "quasi" un gruppo, precisamente valgono le

Proprietà del prodotto

$\forall x, y, z \in \mathbb{Q}$ si ha

1. proprietà associativa $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
2. proprietà commutativa $x \cdot y = y \cdot x$
3. 1 è elemento neutro, cioè $x \cdot 1 = x$
4. esiste l'inverso di x, cioè un numero x^{-1} tale che $x \cdot x^{-1} = 1$

se $x \neq 0$

L'inverso (o reciproco) di $x = \frac{a}{b}$ esiste se $a \neq 0$ e vale
$x^{-1} = \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$

Definizione (divisione fra numeri razionali)

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^{-1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \qquad \text{se } c \neq 0.$$

Definizione (somma di numeri razionali)

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$$

Definizione (prodotto di numeri razionali)

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Proprietà distibutiva del prodotto rispetto alla somma

$\forall x, y, z \in \mathbb{Q}$ si ha

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

Vale inoltre un'utile proprietà

Legge di annullamento del prodotto

$\forall x, y \in \mathbb{Q}$ si ha

$$x \cdot y = 0 \quad \text{se e solo se} \quad x = 0 \text{ o } y = 0$$

In sintesi si dice che $\mathbb{Q}$ con $+$ e $\cdot$ è un **campo**.

Definizione (ordine fra numeri razionali)

Si dice che $a/b > c/d$ *se, e solo se,* $a/b - c/d > 0$
Calcolando $a/b - c/d = (ad - bc)/bd$, *significa che i numeri interi* $ad - bc$ *e* bd *hanno ugual segno.*

Si dice poi che $a/b \geq c/d$ *se* $a/b > c/d$ *oppure* $a/b = c/d$

Osservazione Possiamo sempre riportarci alla situazione in cui b e d sono entrambi positivi. In tal caso $a/b > c/d$ se $ad - bc > 0$.

Proprietà della relazione d'ordine $\geq$

$\forall x, y, z \in \mathbb{Q}$ si ha

1. proprietà riflessiva $x \geq x$
2. proprietà antisimmetrica se $x \geq y$ e $y \geq x$, allora $x = y$
3. proprietà transitiva se $x \geq y$ e $y \geq z$, allora $x \geq z$
4. la relazione è totale $x \geq y$ oppure $y \geq x$

Questo ci permette di rappresentare $\mathbb{Q}$ su una retta ordinata:

Diciamo che $\mathbb{Q}$ è un **campo totalmente ordinato** perché le operazioni di somma e prodotto sono compatibili con la relazione d'ordine. Precisamente valgono

Altre proprietà della relazione d'ordine $\geq$

Se $x \geq y$, allora

5. $x + z \geq y + z$ per ogni z
6. $x \cdot z \geq y \cdot z$ se $z \geq 0$
   $x \cdot z \leq y \cdot z$ se $z \leq 0$

Esercizio

Ci sono cinque persone con diverse situazioni patrimoniali. Oronzo è più ricco di Rocco, le cui ricchezze sono più modeste di quelle di Silvio, e quest'ultimo a sua volta è più danaroso di Piero. Quirino è meno benestante di Piero, ma più agiato di Oronzo. Chi è il terzo in ordine di ricchezza?

1. Piero
2. Rocco
3. Oronzo
4. Silvio
5. Quirino

Esercizio

Ci sono cinque persone con diverse situazioni patrimoniali. Oronzo è più ricco di Rocco, le cui ricchezze sono più modeste di quelle di Silvio, e quest'ultimo a sua volta è più danaroso di Piero. Quirino è meno benestante di Piero, ma più agiato di Oronzo. Chi è il terzo in ordine di ricchezza?

1. Piero
2. Rocco
3. Oronzo
4. Silvio
5. **Quirino**

Esercizio

Giocando a Risiko Giulio Cesare ha vinto più di suo nipote Augusto, ma non di Napoleone. Alessandro Magno ha vinto meno di Carlo Magno, ma più di Napoleone. Chi ha vinto di meno?

1. Carlo Magno
2. Alessandro Magno
3. Napoleone
4. Augusto
5. Giulio Cesare

Esercizio

Giocando a Risiko Giulio Cesare ha vinto più di suo nipote Augusto, ma non di Napoleone. Alessandro Magno ha vinto meno di Carlo Magno, ma più di Napoleone. Chi ha vinto di meno?

1. Carlo Magno
2. Alessandro Magno
3. Napoleone
4. **Augusto**
5. Giulio Cesare

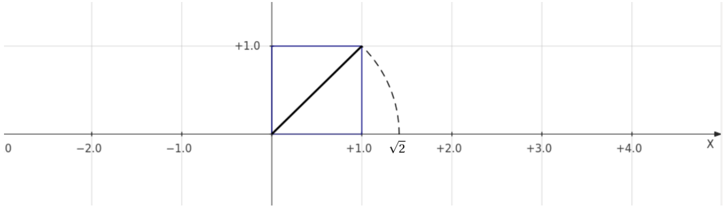
Finalmente possiamo fare tutte le operazioni fondamentali e dunque abbiamo tutti i numeri che ci servono!

NO!

A titolo di esempio, non sappiamo calcolare la lunghezza della diagonale di un quadrato di lato 1.

Il teorema di Pitagora afferma che il quadrato di tale lungezza è uguale alla somma di due quadrati costruiti sui lati, cioè

$$\ell^2 = 1^2 + 1^2 = 2.$$



Ma non esiste alcun numero razionale il cui quadrato faccia 2!

Per colmare questa lacuna dei numeri razionali (e molte altre...) si introducono i numeri reali ($\mathbb{R}$).
Per i nostri scopi, è sufficiente dire che i numeri reali sono tutti i numeri che possiamo scrivere come allineamento decimale (sia esso finito, infinito, periodico...).

Esempio

$-\frac{5}{2} = -2,5$ allineamento decimale finito

$\frac{1}{3} = 0,333333\cdots = 0,\overline{3}$ allineamento decimale infinito periodico

$\sqrt{2} = 1.4142135623\cdots$ allineamento decimale infinito non periodico

Numeri reali $\mathbb{R}$

Sui numeri reali si assegnano somma, prodotto e relazione d'ordine in modo che valgano tutte le **proprietà** che abbiamo riconosciuto per i numeri razionali.
In altre parole, anche $\mathbb{R}$ è un **campo totalmente ordinato**.

In più ora possiamo misurare ogni lunghezza, perché c'è una corrispondenza biunivoca fra i numeri reali e la retta.

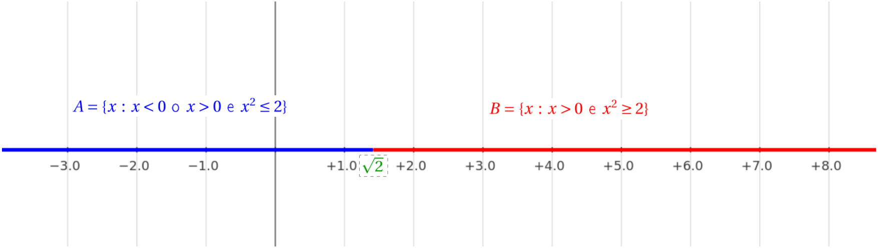
Assioma di completezza

Siano $A, B \subset \mathbb{R}$ tali che $A, B \neq \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \mathbb{R}$ e

$$a < b \quad \forall a \in A, \forall b \in B.$$

Allora esiste un unico $s \in \mathbb{R}$ che fa da elemento separatore:

$$a \leq s \leq b \quad \forall a \in A, \forall b \in B.$$



Osservazione. L'elemento separatore s è l'*estremo superiore* dell'insieme A e l'*estremo inferiore* dell'insieme B.

L'assioma di completezza è equivalente all'esistenza di estremo superiore ed inferiore.