

1. Definizione di superfici regolari

LEZIONE: SUPERFICI REGOLARI

Definizione

Sia D un dominio connesso di \mathbb{R}^2 . Si dice **superficie**, un'applicazione continua

$$\varphi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

dove per ogni $(u, v) \in D$, $\varphi(u, v)$ è il punto dello spazio di coordinate $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$.

Le equazioni

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad (u, v) \in D,$$

sono dette **equazioni parametriche** della superficie.

Definizione

Il **sostegno** della superficie è l'immagine $\varphi(D)$ della funzione, cioè l'insieme dei punti di coordinate $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, con $(u, v) \in D$.

Osservazione

Definizione

Sia I un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$.

Diremo che la **superficie** $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ è **regolare** se:

i) $\varphi \in C^1(D)$

ii) φ è iniettiva in D

iii) la matrice $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v)}$ ha rango 2 in D .

Osservazione

La iii) è equivalente alla seguente condizione:

Esempio 1. Retta

Sia assegnato il punto (x_0, y_0) e la direzione (α, β) . La curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

ha per sostegno la retta che passa per il punto (x_0, y_0) e avente direzione (α, β) . È una curva semplice.

Esempio 2. Segmento

Sia assegnato il punto (x_0, y_0) e la direzione (α, β) . La curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases} \quad t \in [0, 1],$$

ha per sostegno il segmento di estremi (x_0, y_0) e $(x_0 + \alpha, y_0 + \beta)$. È una curva semplice.

Esempio 3. Circonferenza

La curva φ_1 di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi],$$

con $R > 0$ ha per sostegno la circonferenza di centro l'origine e raggio R . È una curva semplice e chiusa (infatti $\varphi_1(0) = \varphi_1(2\pi)$).

Esempi di curve piane: la circonferenza

Osserviamo esplicitamente che la curva φ_2 di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 3\pi],$$

ha lo stesso sostegno di φ_1 , ma le curve φ_1 e φ_2 chiaramente non coincidono avendo insiemi di definizione diversi. La curva φ_2 non è né semplice né chiusa.

Esempi di curve piane: la circonferenza

Sia dato il punto (x_0, y_0) . La curva φ_3 di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x_0 + R \cos t \\ y = y_0 + R \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi],$$

con $R > 0$ ha per sostegno la circonferenza di centro (x_0, y_0) e raggio R . È una curva semplice e chiusa.

Esempio 4. Ellisse

La curva φ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi],$$

ha per sostegno l' ellisse di centro l'origine, semiasse maggiore a e semiasse minore b (la cui equazione cartesiana è $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$). È una curva semplice e chiusa.

Esempi di curve non regolari

- La curva

$$\begin{cases} x = t \\ y = |t| \end{cases} \quad t \in [-1, 1].$$

è non regolare perché $y(t) = |t|$ non è di classe C^1 .

- La curva φ

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases} \quad t \in [-1, 1].$$

è non regolare perché $\|\varphi'(0)\| = 0$.

Definizione

Una curva di equazioni parametriche $\varphi(t)$ con $t \in I$ è detta **regolare a tratti** se $\varphi \in C^0(I)$ e l'intervallo I può essere suddiviso in un numero finito di sottointervalli, cioè $I = I_1 \cup \dots \cup I_m$, e $\varphi|_{I_j}$ è una curva regolare per ogni $j = 1, \dots, m$.

Definizione

Date due curve di equazioni parametriche $\varphi_1(t)$ con $t \in [a, b]$ e $\varphi_2(t)$ con $t \in [b, c]$ tali che $\varphi_1(b) = \varphi_2(b)$. L'unione delle due curve è la curva di equazioni parametriche

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_1(t) & t \in [a, b] \\ \varphi_2(t) & t \in [b, c] \end{cases}$$

Una curva regolare a tratti è unione di un numero finito di curve regolari.

Curve regolari a tratti: esempi

La curva $\varphi(t) = (t, |t|)$ con $t \in [-1, 1]$ è non regolare, ma è regolare a tratti. Infatti è unione della curva regolare $\varphi_1(t) = (t, t)$ con $t \in [0, 1]$ e della curva regolare $\varphi_2(t) = (t, -t)$ con $t \in [-1, 0]$

Osservazione

Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione $C^1(I)$. Allora il grafico di f di equazione $y = f(x)$ è sostegno di una curva regolare. L'equazione $y = f(x)$ si dice equazione cartesiana della curva.

Infatti, sia f una funzione definita in un intervallo I di \mathbb{R} , di classe $C^1(I)$. Il grafico di f è il sostegno della curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases} \quad t \in I.$$

Verifichiamo che è una curva regolare.

La condizione *i*) è banalmente verificata. Inoltre

$\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \sqrt{1 + (f'(t))^2} > 0$ per ogni $t \in I$ e dunque anche la *ii*)' è soddisfatta.

- Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = x^3$. Il grafico di f di equazione $y = x^3$ è sostegno della curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^3 \end{cases} \quad t \in I.$$

La curva è regolare perché la funzione è di classe C^1 .
L'equazione $y = x^3$ è l' **equazione cartesiana** della curva.

- Sia $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \log x$. Il grafico di f di equazione $y = \log x$ è sostegno della curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = t \\ y = \log t \end{cases} \quad t \in [1, 2].$$

La curva è regolare perché la funzione è di classe C^1 .
L'equazione $y = \log x$ è l'equazione cartesiana della curva.

Versore tangente

Sia φ una curva regolare definita in I e $t_0 \in I$.

Il vettore $\varphi'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$ è detto **vettore tangente** alla curva φ nel punto $\varphi(t_0)$.

Il versore

$$T(t_0) = \frac{\varphi'(t_0)}{\|\varphi'(t_0)\|} = \left(\frac{x'(t_0)}{\sqrt{(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2}}, \frac{y'(t_0)}{\sqrt{(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2}} \right)$$

si chiama **versore tangente**.

Chiameremo retta tangente alla curva in $\varphi(t_0)$ la retta di equazione

$$(x - x(t_0))y'(t_0) - (y - y(t_0))x'(t_0) = 0$$

Si definisce **versore normale** alla curva φ nel punto $\varphi(t_0)$, il versore

$$N(t_0) = \left(\frac{y'(t_0)}{\sqrt{(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2}}, \frac{-x'(t_0)}{\sqrt{(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2}} \right)$$

ottenuto ruotando $T(t_0)$ di $\frac{\pi}{2}$ in senso orario.

- La curva φ

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

ha vettore tangente $\varphi'(t) = (\alpha, \beta)$, versore tangente

$T(t) = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right)$ e versore normale

$N(t) = \left(\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \frac{-\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right)$.

La retta tangente alla curva in $\varphi(t_0)$ è la curva stessa.

Calcolo del vettore tangente e normale

- La curva φ

$$\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi],$$

ha vettore tangente $\varphi'(t) = (-R \sin t, R \cos t)$, versore tangente $T(t) = (-\sin t, \cos t)$ e versore normale $N(t) = (\cos t, \sin t)$.

La retta tangente alla curva in $\varphi(t_0)$ è la retta di equazione

$$(x - R \cos t_0)(R \cos t_0) - (y - R \sin t_0)(-R \sin t_0) = 0$$

Calcolo del vettore tangente e normale

- Sia $f \in C^1(I)$. La curva φ

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases} \quad t \in I,$$

ha vettore tangente $\varphi'(t) = (1, f'(t))$, versore tangente

$T(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+(f'(t))^2}}, \frac{f'(t)}{\sqrt{1+(f'(t))^2}} \right)$ e versore normale

$N(t) = \left(\frac{f'(t)}{\sqrt{1+(f'(t))^2}}, -\frac{1}{\sqrt{1+(f'(t))^2}} \right)$.

La retta tangente alla curva in $\varphi(t_0) = (t_0, f(t_0))$ è la retta di equazione

$$(x - t_0)f'(t_0) - (y - f(t_0)) = 0,$$

ovvero la retta tangente al grafico della funzione in $(t_0, f(t_0))$.

Curve in coordinate polari

La curva piana

$$\rho = \rho(\theta) \quad \text{per } \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$$

in coordinate polari ha le seguenti equazioni in coordinate cartesiane

$$\begin{cases} x = \rho(\theta) \cos \theta \\ y = \rho(\theta) \sin \theta \end{cases} \quad \text{per } \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1.$$

Se ρ è una funzione di classe C^1 , si verifica facilmente che la curva è regolare se e solo se

$$[\rho(\theta)]^2 + [\rho'(\theta)]^2 > 0 \quad \text{per } \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$$

La spirale di Archimede è la curva di coordinate polari

$$\rho = A\theta \quad \text{per } \theta \in [0, +\infty[$$

con $A > 0$. Essa è regolare, in quanto

$$[\rho(\theta)]^2 + [\rho'(\theta)]^2 = A\sqrt{1 + \theta^2} > 0 \quad \text{per } \theta \in [0, +\infty[.$$

La cardioide è la curva di coordinate polari

$$\rho = a(1 + \cos \theta) \quad \text{per } 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

con $a > 0$. Essa non è regolare, in quanto $\rho(\pi) = \rho'(\pi) = 0$.
Nel disegno $a = 2$.

2. Curve regolari nello spazio

LEZIONE: SUPERFICI REGOLARI

Definizione di curva nello spazio

Definizione

Sia I un intervallo di \mathbb{R} . Si dice **curva nello spazio**, o cammino in \mathbb{R}^3 , un'applicazione continua

$$\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

dove per ogni $t \in I$, $\varphi(t)$ è il punto di coordinate $(x(t), y(t), z(t))$.

Le equazioni

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in I,$$

sono dette **equazioni parametriche** della curva di parametro t .

Il **sostegno** della curva è l'immagine $\varphi(I)$ della funzione, cioè l'insieme dei punti di coordinate $(x(t), y(t), z(t))$, con $t \in I$.

Definizione

Sia I un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$.

Diremo che la **curva** $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é **regolare** se:

i) $\varphi \in C^1([a, b])$

ii) $\varphi'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) \neq (0, 0, 0)$, per ogni $t \in]a, b[$.

Definizione

Una curva $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ si dice **semplice** se comunque presi due punti $t_1 \neq t_2$ di I non entrambi estremi dell'intervallo, risulta $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$.

Una curva φ definita in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, si dice **chiusa** se $\varphi(a) = \varphi(b)$.

Esempio 1. Retta

La curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

ha per sostegno una retta nello spazio che passa per il punto (x_0, y_0, z_0) e avente direzione (α, β, γ) . È una curva regolare e semplice.

Esempio 2. Elica cilindrica

La curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \\ z = bt \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

con $a > 0$ e $b \neq 0$ ha per sostegno l'elica cilindrica di passo $2\pi b$. È una curva regolare e semplice.

Versore tangente

Sia φ una curva regolare definita in I e $t_0 \in I$.

Il vettore $\varphi'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ è detto **vettore tangente** alla curva φ nel punto $\varphi(t_0)$.

Il versore

$$T(t_0) = \frac{\varphi'(t_0)}{\|\varphi'(t_0)\|}$$

si chiama **versore tangente**.

Chiameremo retta tangente alla curva in $\varphi(t_0)$ la retta di equazione

$$\begin{cases} x = x(t_0) + x'(t_0)(t - t_0) \\ y = y(t_0) + y'(t_0)(t - t_0) \\ z = z(t_0) + z'(t_0)(t - t_0) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

- La curva φ

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

ha vettore tangente $\varphi'(t) = (\alpha, \beta, \gamma)$ e versore tangente

$$T(t) = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}, \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}, \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} \right).$$

La retta tangente alla curva in $\varphi(t_0)$ è la curva stessa.

3. Curve equivalenti

LEZIONE: SUPERFICI REGOLARI

Per semplicità consideriamo solo curve piane.
Quanto diremo può essere generalizzato al caso di curve nello spazio.

Definizione

Due curve $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2, \psi : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ si dicono *equivalenti* se esiste un' applicazione g di classe C^1 di I in J tale che

- $g'(t) \neq 0, \forall t \in I,$
- $\varphi(t) = \psi(g(t)), \forall t \in I.$

L'applicazione g è detta *cambiamento ammissibile di parametro*

Naturalmente essendo g invertibile perchè strettamente monotona anche g^{-1} è di classe C^1 di J in $I,$

$(g^{-1})'(s) \neq 0, \forall s \in J$ e inoltre $\psi(t) = \varphi(g^{-1}(s)), \forall s \in J.$

Dunque anche g^{-1} è un cambiamento ammissibile di parametro.

Osservazione

Due curve equivalenti hanno lo stesso sostegno.

La relazione di essere equivalenti è una relazione di equivalenza. Essa determina una decomposizione della famiglia delle curve regolari in classi di equivalenza a due a due disgiunte. Nel seguito useremo il termine curva sia per indicare una classe di equivalenza, sia per indicare una qualunque delle sue rappresentazioni parametriche. Sarà chiaro dal contesto, in quale dei due sensi è usato tale termine.

Esempio di cambiamento ammissibile di parametro

Le curve

$$\varphi(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

e

$$\psi(s) = (\cos 2s, \sin 2s) \quad s \in [0, \pi]$$

sono equivalenti.

Infatti $\varphi(t) = \psi(g(t))$, dove $g(t) = \frac{t}{2}$ è il cambiamento ammissibile di parametro. Infatti la funzione g è di classe C^1 e $g'(t) \neq 0$ per $t \in [0, 2\pi]$.

Orientamento di una curva

Sia assegnata una curva di equazioni parametriche $\varphi(t)$ con $t \in I$. È evidente che sul sostegno $\varphi(I)$ della curva si possono fissare due versi di percorrenza: il verso positivo, denotato con φ_+ , e il verso negativo, denotato con φ_- .

In particolare, ad ogni curva si può associare un verso di percorrenza indotto dalla rappresentazione parametrica fissata.

Sia $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regolare, e siano $\varphi(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$ le sue equazioni parametriche, allora il **verso indotto dalla rappresentazione parametrica (o anche verso delle t crescenti)** è quello così definito:

$P_1 = \varphi(t_1)$ precede $P_2 = \varphi(t_2)$ se $t_1 < t_2$.

Segmento

Sia data la curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases} \quad t \in [0, 1].$$

Il verso indotto dalla rappresentazione parametrica è quello dall'estremo (x_0, y_0) all'estremo $(x_0 + \alpha, y_0 + \beta)$.

Circonferenza

Sia data la curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Il verso di percorrenza indotto dalla rappresentazione parametrica è quello antiorario.