1. Domini normali

LEZIONE: INTEGRALI DOPPI

Domini normali rispetto all'asse x

Diamo la definizione di dominio normale rispetto ad uno degli assi coordinati.

Siano $\alpha,\ \beta \in C^0([a,b])$ tali che

$$\alpha(x) \leq \beta(x), \quad \forall x \in [a,b].$$

Definizione

Il sottoinsieme D di $\mathbb{R}^2$ così definito

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\right\}.$$

si chiama dominio normale rispetto all'asse x

Domini normali rispetto all'asse y

Diamo la definizione di dominio normale all'altro asse coordinato.

Siano γ, $\delta \in C^0([c, d])$ tali che

$$\gamma(y) \leq \delta(y), \quad \forall y \in [c, d].$$

Definizione

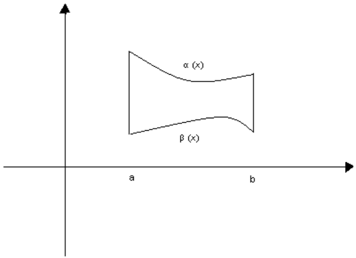
Il sottoinsieme D di $\mathbb{R}^2$ così definito

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)\right\}.$$

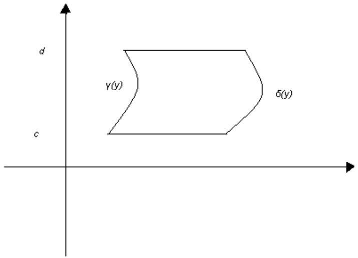
si chiama dominio normale rispetto all'asse y

Domini normali, esempi

dominio normale
rispetto all'asse *x*



dominio normale
rispetto all'asse *y*



Ricordando il significato geometrico dell'integrale di una funzione di una variabile, è evidente che se D è un dominio normale rispetto a x allora D è misurabile e la sua misura (o area) è data da

$$m(D) = \int_a^b (\beta(x) - \alpha(x))\, dx.$$

Una formula analoga vale ovviamente nel caso di domini normali rispetto all'asse y :

$$m(D) = \int_c^d (\delta(y) - \gamma(y))\, dy.$$

2. Integrali doppi su domini normali

LEZIONE: INTEGRALI DOPPI

Partizione di un dominio normale

Sia D un dominio normale.

Diamo innanzitutto la definizione di partizione di D.

Una partizione del dominio D in domini normali, è un insieme finito

$$P = \{D_1, D_2, ..., D_n\}$$

di domini normali, contenuti in D, a due a due privi di punti interni in comune, la cui unione sia D.

Si può dimostrare che, in tal caso, risulta

$$m(D) = \sum_{i=1}^{n} m(D_i).$$

Somme integrali

Sia $f : D \to \mathbb{R}$ una funzione limitata.

Per ogni partizione $P = \{D_1, D_2, ..., D_n\}$ di D in domini normali definiamo le somme integrali inferiori e superiori della funzione f corrispondente alla partizione P nel seguente modo:

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \, m(D_i), \quad \textit{somma integrale inferiore}$$

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \, m(D_i), \quad \textit{somma integrale superiore}$$

dove si è indicato con

$$m_i = \inf_{(x,y)\in D_i} f(x, y), \qquad M_i = \sup_{(x,y)\in D_i} f(x, y).$$

Osservazioni

Si osservi che la funzione f è per ipotesi limitata quindi M_i e m_i sono finiti.

Dalla definizione data segue subito che

$$s(f, P) \leq S(f, P),$$

per ogni partizione P del dominio D.

Più in generale si può dimostrare che la disuguaglianza precedente vale anche se consideriamo due diverse partizioni P_1 e P_2:

Proposizione

Per ogni coppia P_1, P_2 di partizioni di D,

$$s(f, P_1) \leq S(f, P_2).$$

Osservazioni

La Proposizione precedente ci consente di affermare che i due insiemi numerici, costituiti dalle somme integrali inferiori e dalle somme integrali superiori facendo variare la partizione P,

$$\{s(f,P): \ P \text{ partizione dell'insieme } D\}$$

$$\{S(f,P): \ P \text{ partizione dell'insieme } D\}.$$

sono separati. Dunque

$$\sup_P s(f,P) \le \inf_P S(f,P).$$

Definizione di integrale doppio

Definizione

Sia $f : D \to \mathbb{R}$ una funzione limitata nel dominio normale D.
f si dice integrabile (secondo Riemann) in D se

$$\sup_P s(f, P) = \inf_P S(f, P),$$

cioè se i due insiemi numerici $\{s(f, P) :\; P \text{ partizione di } D\}$, $\{S(f, P) :\; P \text{ partizione di } D\}$ sono contigui.
In tal caso, l'unico elemento di separazione è detto integrale doppio di f esteso al dominio D e si indica con il simbolo $\iint_D f(x, y)\,dxdy$. Dunque:

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy = \sup_P s(f, P) = \inf_P S(f, P).$$

Cilindroide

Sia D un dominio normale del piano, $f : D \to \mathbb{R}$ tale che $f(x, y) \geq 0, \ \forall (x, y) \in D$.

Si definisce cilindroide relativo ad f e di base il dominio D l'insieme dei punti dello spazio compresi tra il dominio D ed il grafico della funzione f, precisamente

$$C_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y) \in D, \ 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

Si vuole calcolare il volume del cilindride C_f.

Volume del cilindroide: osservazione

Osserviamo che le quantità $s(f, P)$ e $S(f, P)$, prima introdotte, hanno un evidente significato geometrico.

Fissata la decomposizione P:

$s(f, P)$ è un'approssimazione per difetto del volume del cilindroide: è il volume dell'unione dei solidi di base D_k ed altezze m_k, contenuta in C_f,

$S(f, P)$ è, invece, un'approssimazione per eccesso del volume del cilindroide: è il volume dell'unione dei solidi di base D_k ed altezze M_k, contenente C_f.

Ovviamente, le approssimazioni saranno tanto più accurate quanto più fitta è la partizione P.

Significato geometrico dell'integrale doppio

Osservazione

Sia D un dominio normale, $f : D \to \mathbb{R}$.

Se $f \geq 0$ in D è integrabile secondo Riemann nel dominio D, allora il cilindroide di base D relativo alla funzione f è misurabile e la sua misura (o volume) è l'integrale doppio prima definito. Dunque

$$m(C_f) = \iint_D f(x, y) dxdy.$$

3. Integrali doppi: prime proprietà

LEZIONE: INTEGRALI DOPPI

Se la funzione $f : D \to \mathbb{R}$ è continua nell'insieme normale D, si può dimostrare che i due insiemi numerici
$\{s(f, P) : \ P \text{ partizione di } D\}$, $\{S(f, P) : \ P \text{ partizione di } D\}$
sono contigui , vale cioè il seguente risultato:

Proposizione

Sia D un dominio normale.
f continua in $D \ \Rightarrow \ f$ integrabile in D.

Prime proprietà

Siano f, g due funzioni integrabili secondo Riemann nel dominio normale D. Valgono le seguenti proprietà:

1) Proprietà di linearità: se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora

$$\iint_D (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y))dxdy =$$

$$= \alpha \iint_D f(x,y)dxdy + \beta \iint_D g(x,y)dxdy.$$

2) Proprietà di monotonia: se $f(x,y) \leq g(x,y)$ per $(x,y) \in D$, allora

$$\iint_D f(x,y)dxdy \leq \iint_D g(x,y)dxdy.$$

Prime proprietà

3) Proprietà di additività: se $\{D_1, D_2, ..., D_n\}$ è una partizione di D in domini normali, allora

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \sum_{i=1}^{n} \iint_{D_i} f(x,y)dxdy.$$

4) Proprietà di media: se f è continua, allora

$$m(D)\,\min_D f(x,y) \leq \iint_D f(x,y)dxdy \leq \,m(D)\,\max_D f(x,y).$$

Inoltre, se D è connesso, esiste almeno un punto $(x_0, y_0) \in \overset{\circ}{D}$ tale che

$$f(x_0, y_0) = \frac{1}{m(D)} \iint_D f(x,y)dxdy.$$

Generalizzazione

Se il dominio D non è normale, ma si può decomporre in un numero finito di domini normali $\{D_1, D_2, ..., D_n\}$, a due a due privi di punti interni in comune, allora la definizione di integrale doppio esteso al dominio D, si può dare nel seguente modo:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \sum_{i=1}^{n} \iint_{D_i} f(x,y)dxdy.$$