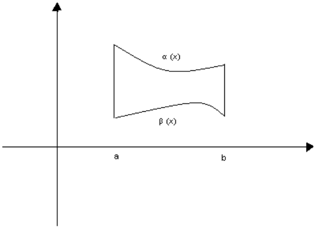
1. Formule di riduzione

LEZIONE: FORMULE DI RIDUZIONE PER GLI INTEGRALI DOPPI

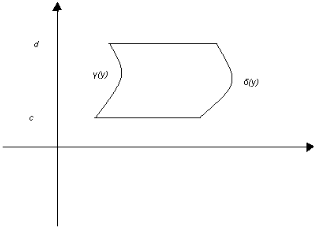
Calcolo di integrali in domini normali

Vediamo come si può operativamente calcolare un integrale doppio.
Un primo strumento fondamentale è dato dalle formule di riduzione, che valgono nel caso in cui il dominio di integrazione è normale rispetto ad uno degli assi coordinati. Fisseremo, cioè, l'attenzione su domini del tipo

dominio normale rispetto all'asse *x*



dominio normale rispetto all'asse *y*



Formule di riduzione

Teorema (Prima formula di riduzione)

Sia $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\right\}$*, un dominio normale rispetto all'asse* x*. Sia* f *una funzione continua in* D*, allora*

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)dy. \tag{1}$$

Osserviamo che

$$\int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)dy\right) dx.$$

Formule di riduzione

Teorema (Seconda formula di riduzione)

Sia $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)\right\}$, *un dominio normale rispetto all'asse* y. *Sia* f *una funzione continua in* D, *allora*

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy = \int_c^d dy \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x, y)\,dx. \tag{2}$$

Osserviamo che

$$\int_c^d dy \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x, y)\,dx = \int_c^d \left(\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x, y)\,dx\right) dy$$

Osservazioni

Se il dominio D non è normale, ma si può decomporre in un numero finito di domini normali $\{D_1, D_2, ..., D_n\}$, a due a due privi di punti interni in comune, allora, tenendo presente la definizione di integrale doppio esteso al dominio D, si ha

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \sum_{i=1}^{n} \iint_{D_i} f(x,y)dxdy,$$

dunque le formule di riduzione potanno essere utilizzate per calcolare $\iint_{D_i} f(x,y)dxdy$.

Osservazioni

Se il dominio è normale solo rispetto a x o solo rispetto a y, la scelta della formula di riduzione da utilizzare è ovviamente obbligata.

In altri casi il dominio può essere normale sia rispetto a x che a y. Valgono ovviamente in tal caso entrambe le formule.

In questi casi la scelta di considerare il dominio D come dominio normale rispetto a x o rispetto a y può dipendere dalla funzione da integrare, come vedremo in alcuni esempi.

2. Primi esempi

LEZIONE: FORMULE DI RIDUZIONE PER GLI INTEGRALI DOPPI

Esempio 1

Calcolare l'integrale della funzione $f(x, y) = 4 - x - y$ *esteso al quadrato* $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2\}$

Bisogna calcolare l'integrale

$$\iint_Q (4 - x - y)\, dxdy.$$

Il quadrato Q è un dominio normale rispetto a x e a y. Si può quindi usare sia (1) che (2). Si ottiene che

$$\begin{aligned} \iint_Q (4 - x - y)\, dxdy &= \int_0^1 dx \int_1^2 (4 - x - y)\, dy \\ &= \int_1^2 dy \int_0^1 (4 - x - y)\, dx. \end{aligned}$$

Usando la prima formula, si ha

$$\iint_Q (4-x-y)dxdy = \int_0^1 dx \int_1^2 (4-x-y)dy,$$

poichè

$$\begin{aligned}\int_1^2 (4-x-y)dy &= \left[4y - xy - \frac{y^2}{2}\right]_1^2 \\ &= (8-2x-2) - \left(4 - x - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{5}{2} - x,\end{aligned}$$

si ha

$$\iint_Q (4-x-y)dxdy = \int_0^1 \left(\frac{5}{2} - x\right) dx = \left[\frac{5}{2}x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 2.$$

Usando la seconda formula, si ha

$$\iint_Q (4-x-y)\,dxdy = \int_1^2 dy \int_0^1 (4-x-y)\,dx,$$

poichè

$$\int_0^1 (4-x-y)\,dx = \left[4x - \frac{x^2}{2} - xy\right]_0^1 = (4-\frac{1}{2}-y)-(0) = \frac{7}{2}-y,$$

si ha

$$\begin{aligned}\iint_Q (4-x-y)\,dxdy &= \int_1^2 \left(\frac{7}{2}-y\right) dy = \\ &= \left[\frac{7}{2}y - \frac{y^2}{2}\right]_1^2 = 5-3 = 2.\end{aligned}$$

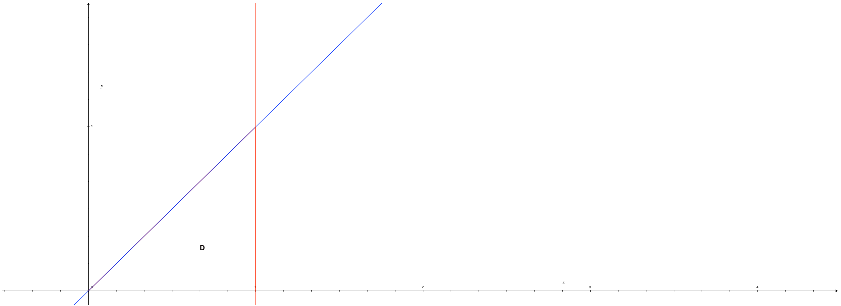
Esempio 2

Calcolare

$$\iint_D xydxdy,$$

dove D è il triangolo di vertici $O(0,0), A(1,0), B(1,1)$.

Il triangolo D è un dominio normale rispetto a x e a y.



Esempio 2

Consideriamo D come dominio normale rispetto a x:

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x \right\}.$$

Usando la (1) si ottiene che

$$\iint_D xydxdy = \int_0^1 dx \int_0^x xydy.$$

Poichè

$$\int_0^x xydy = \left[x\frac{y^2}{2} \right]_0^x = \frac{x^3}{2},$$

si ha

$$\iint_D xydxdy = \int_0^1 \frac{x^3}{2} dx = \left[\frac{x^4}{8} \right]_0^1 = \frac{1}{8}.$$

Esempio 2

Consideriamo D come dominio normale rispetto a y:

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 1, y \le x \le 1 \right\}.$$

Usando la (2) si ottiene che

$$\iint_D xydxdy = \int_0^1 dy \int_y^1 xydx.$$

Poichè

$$\int_y^1 xydx = \left[y\frac{x^2}{2} \right]_y^1 = \frac{y}{2} - \frac{y^3}{2},$$

si ha

$$\iint_D xydxdy = \int_0^1 \left(\frac{y}{2} - \frac{y^3}{2} \right) dx = \left[\frac{y^2}{4} - \frac{y^4}{8} \right]_0^1 = \frac{1}{8}.$$

Esempio 3

Calcolare l'integrale della funzione $f(x,y) = \dfrac{e^{\frac{y}{x}}}{x^3}$ *esteso al quadrato* $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 2, 0 \le y \le 1\}$

Bisogna calcolare l'integrale

$$\iint_Q \frac{e^{\frac{y}{x}}}{x^3}\, dxdy.$$

Il quadrato Q è un dominio normale rispetto a x e a y. Si può quindi usare sia (1) che (2).

Esempio 3

Utilizzando la (1) si ha

$$
\begin{aligned}
\iint_Q \frac{e^{\frac{y}{x}}}{x^3}dxdy &= \int_1^2 dx \int_0^1 \frac{e^{\frac{y}{x}}}{x^3}dy = \int_1^2 \frac{1}{x^2}dx \int_0^1 \frac{e^{\frac{y}{x}}}{x}dy \\
&= \int_1^2 \frac{1}{x^2}\left[e^{\frac{y}{x}}\right]_0^1 dx = \int_1^2 \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx - \int_1^2 \frac{1}{x^2}dx \\
&= \left[-e^{\frac{1}{x}}\right]_1^2 - \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = e - \sqrt{e} - \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Utilizzando invece la (2) si ha

$$
\iint_Q \frac{e^{\frac{y}{x}}}{x^3}dxdy = \int_0^1 dy \int_1^2 \frac{e^{\frac{y}{x}}}{x^3}dx.
$$

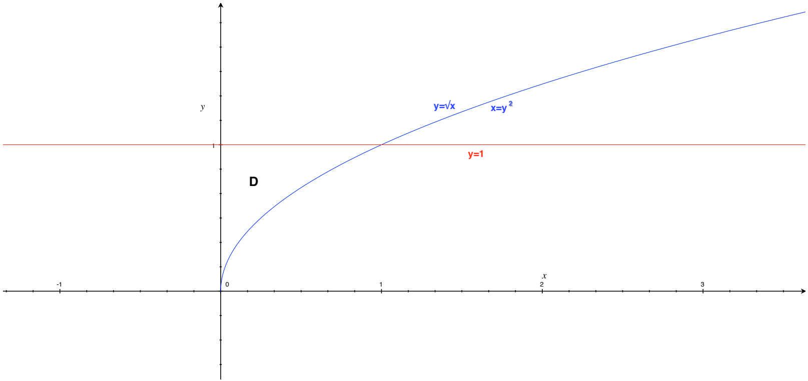
Osserviamo che tale integrale non è elementarmente calcolabile.

Esempio 4

Calcolare

$$\iint_D e^{y^3}\, dxdy,$$

dove $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, \sqrt{x} \leq y \leq 1\right\}$



Esempio 4

Considerando D come dominio normale rispetto a x, cioè

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, \sqrt{x} \leq y \leq 1 \right\}$$

e usando la (1) si ottiene che

$$\iint_D e^{y^3} dxdy = \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3} dy,$$

ma tale integrale non è elementarmente calcolabile.

Esempio 4

Considerando invece D come dominio normale rispetto a y :

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y^2\right\}$$

e usando la (2) si ottiene che

$$\begin{aligned} \iint_D e^{y^3} dxdy &= \int_0^1 dy \int_0^{y^2} e^{y^3} dx \\ &= \int_0^1 e^{y^3} dy \int_0^{y^2} dx. \end{aligned}$$

Poichè

$$\int_0^{y^2} dx = [x]_0^{y^2} = y^2$$

si ha

$$\iint_D e^{y^3} dxdy = \int_0^1 y^2 e^{y^3} dy = \left[\frac{e^{y^3}}{3}\right]_0^1 = \frac{e-1}{3}.$$