1. Esercizi svolti

LEZIONE: FORME DIFFERENZIALI: ESERCIZI

Esercizio 1.

i) Stabilire se la forma differenziale

$$\omega = 2xydx + (x^2 + 2y)dy$$

è esatta e in caso affermativo calcolare una primitiva.

ii) Calcolare l'integrale curvilineo di ω lungo la curva φ di equazione cartesiana

$$y = \operatorname{arctg} \frac{1 - \cos 3x}{2 - \operatorname{sen}^2 x},$$

con $0 \leq x \leq \pi$, orientata nel verso delle x crescenti.

Risoluzione (i)

Poiché la forma differenziale è definita in tutto il piano, che è semplicemente connesso, per stabilire se è esatta basta verificare che le derivate a_y, b_x coincidono, cioè che la forma differenziale è chiusa.
Infatti, risulta:

$$(2xy)_y = 2x, \qquad (x^2 + 2y)_x = 2x.$$

Dunque, utilizzando il II criterio di integrabilità otteniamo che la forma differenziale è esatta.

Esercizio 1

Utilizzando la definizione, per trovare una primitiva f occorre risolvere il sistema:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2xy \\ f_y(x,y) = x^2 + 2y. \end{cases}$$

Integrando la prima delle due equazioni rispetto alla variabile x si ottiene

$$f(x,y) = x^2 y + g(y) \tag{1}$$

con $g(y)$ funzione derivabile da determinare utilizzando la seconda delle due equazioni. Derivando la relazione (1) rispetto a y e imponendo la seconda delle equazioni si ottiene:

$$f_y(x,y) = x^2 + g'(y) = x^2 + 2y,$$

da cui si ricava $g'(y) = 2y$ e quindi $g(y) = y^2 + K$. Si conclude, dunque, che l'insieme delle primitive è dato da

$$f(x,y) = x^2 y + y^2 + K$$

Risoluzione (ii)

Avendo giá stabilito che ω è esatta e che una sua primitiva è data da $f(x, y) = x^2y + y^2$, l'integrale curvilineo della una forma differenziale esatta è:

$$\int_\varphi \omega = f(\pi, \operatorname{arctg} \frac{1 - \cos 3\pi}{2 - \operatorname{sen}^2 \pi}) - f(0, \operatorname{arctg} \frac{1 - \cos 0}{2 - \operatorname{sen}^2 0}) =$$

$$= f(\pi, \operatorname{arctg} 1) - f(0, \operatorname{arctg} 0) = f(\pi, \frac{\pi}{4}) - f(0, 0) = \pi^2 \frac{\pi}{4} + \frac{\pi^2}{16}.$$

Esercizio 2.

i) Stabilire se il campo di forze

$$F(x, y) = (2xy, x^2 + 2y)$$

è conservativo e in caso affermativo calcolare un potenziale.

ii) Calcolare il lavoro compiuto dalla forza F lungo la curva φ di equazione cartesiana

$$y = \operatorname{arctg} \frac{1 - \cos 3x}{2 - \operatorname{sen}^2 x},$$

con $0 \leq x \leq \pi$, orientata nel verso delle x crescenti.

Risoluzione (i)

Poiché il campo di forze è definito in tutto il piano, che è semplicemente connesso, per stabilire se è conservativo basta verificare che le derivate $\frac{\partial}{\partial y} F_1$, $\frac{\partial}{\partial x} F_2$ coincidono.
Infatti, risulta:

$$\frac{\partial}{\partial y} F_1(x, y) = 2x, \qquad \frac{\partial}{\partial x} F_1 = 2x.$$

Utilizzando la definizione, per trovare un potenziale f occorre risolvere il sistema:

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 2xy \\ f_y(x, y) = x^2 + 2y. \end{cases}$$

Ragionando come nell'esercizio precedente si ha:

$$f(x, y) = x^2 y + y^2 + K.$$

Risoluzione (ii)

Avendo giá stabilito F è conservativo e che una suo potenziale è dato da $f(x,y) = x^2y + y^2$, il lavoro di un campo conservativo è:

$$\int_\varphi \omega = f(\pi, \operatorname{arctg} \frac{1-\cos 3\pi}{2-\operatorname{sen}^2 \pi}) - f(0, \operatorname{arctg} \frac{1-\cos 0}{2-\operatorname{sen}^2 0}) =$$

$$= f(\pi, \operatorname{arctg} 1) - f(0, \operatorname{arctg} 0) = f(\pi, \frac{\pi}{4}) - f(0,0) = \pi^2 \frac{\pi}{4} + \frac{\pi^2}{16}.$$

Esercizio 3.

Calcolare l'integrale curvilineo di

$$\omega = ye^x dx + e^y \cos x dy$$

lungo la curva φ di equazione cartesiana $y = \cos x$ di estremi $P = (0, 1)$ e $Q = (\frac{\pi}{2}, 0)$ orientata nel verso che va da P a Q.

Risoluzione

Le derivate ad incrocio dei coefficienti di ω, a_y e b_x , non coincidono, quindi ω non è esatta. Pertanto, non si puó procedere come nell'esercizio precedente, ma bisogna applicare direttamente la definizione di integrale curvilineo.

Esercizio 3

Considerate le equazioni parametriche di φ:

$$\begin{cases} x = t \\ y = \cos t \end{cases} \qquad t \in [0, \frac{\pi}{2}],$$

risulta:

$$\int_\varphi y e^x dx + e^y \cos x dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t e^t - e^{\cos t} \cos t \operatorname{sen} t) dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t e^t dt - \int_0^1 e^z z dz = \frac{1}{2}[e^t(\operatorname{sen} t + \cos t)]_0^{\frac{\pi}{2}} - [e^z(z-1)]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}} - 1) - 1$$

Esercizio 4.

Stabilire se la forma differenziale

$$\omega = \frac{2x}{x^2 - y}dx - \frac{1}{x^2 - y}dy$$

è esatta e calcolarne, se possibile, la primitiva che si annulla nel punto $(1, 2)$.

Risoluzione

Osserviamo, innanzitutto, che la forma ω è definita nei punti del piano che non appartengono alla parabola di equazione $y = x^2$. Pertanto, il suo insieme di definizione non è un connesso. Le componenti connesse del suo insieme di definizione, ovvero l'insieme dei punti esterni alla parabola e l'insieme dei punti interni alla parabola, sono entrambe semplicemente connesse. Poichè si può vedere facilmente che ω è chiusa, si puó dedurre che la restrizione di ω a ciascuna delle componenti connesse è esatta. Dovendo determinare la primitiva che si annulla nel punto $(1, 2)$, determiniamo l'insieme delle primitive nell'insieme dei punti del piano tali che $y > x^2$.

Esercizio 4

Per trovare una primitiva f occorre risolvere il sistema:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = \dfrac{2x}{x^2 - y} \\ \\ f_y(x,y) = -\dfrac{1}{x^2 - y}. \end{cases}$$

Integrando, per esempio la seconda equazione rispetto a y si ottiene:

$$f(x,y) = \log \mid x^2 - y \mid + g(x),$$

da cui derivando rispetto a x e imponendo la prima equazione del sistema, si ricava:

$$f_x(x,y) = \frac{2x}{x^2 - y} + g'(x) = \frac{2x}{x^2 - y},$$

per cui $g'(x) = 0$, e quindi $g(x) = K$.

Esercizio 4

Ne segue che l'insieme delle primitive nella componente connessa contenente il punto $(1,2)$ è dato da:

$$f(x,y) = \log(y - x^2) + K$$

Imponendo $f(1,2) = 0$ si ottiene $K = 0$. Pertanto la primitiva richiesta è

$$f(x,y) = \log(y - x^2).$$

Esercizio 5.

Stabilire se la forma differenziale

$$\omega = \frac{x}{x^2 + y^2} dx + \frac{y}{x^2 + y^2} dy$$

è esatta e calcolarne, se possibile, una primitiva.

Risoluzione

Osserviamo innanzitutto che la forma ω è definita nel piano privato dell'origine. Si può vedere, facilmente, che ω è chiusa nel suo insieme di definizione, il quale non è semplicemente connesso e quindi non si può concludere che ω è esatta.

Esercizio 5

Proposizione

Sia ω una forma differenziale lineare di classe C^1 e chiusa in $A - (x_0, y_0)$ con A dominio semplicemente connesso e sia φ una curva che è frontiera di un dominio contenente il punto (x_0, y_0). Se

$$\int_{\varphi} \omega = 0,$$

allora ω è esatta.

Esercizio 5

Sia φ la curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Si ha

$$\int_\varphi \omega = 0,$$

allora per la precedente si ha che ω è esatta.

Esercizio 5

Per trovare una primitiva f occorre risolvere il sistema:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2} \\[2ex] f_y(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}. \end{cases}$$

Ragionando come negli esercizi precedenti si ha che l'insieme delle primitive è dato da:

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + K.$$

Esercizio 6.

Calcolare il lavoro del campo di forze

$$F(x, y, z) = (y - x, z + x, x + y)$$

lungo la curva φ di equazioni

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = -t \end{cases} \qquad t \in [0, 1].$$

Risoluzione

Il lavoro del campo di forze

$$F(x, y, z) = (y - x, z + x, x + y)$$

lungo la curva φ di equazioni

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = -t \end{cases} \qquad t \in [0, 1].$$

è

$$\int_\varphi \omega = \int_0^1 [(2t - t)1 + (t - t)2 + (t + 2t)(-1)]dt = -2.$$

Esercizio 7.

Stabilire se il campo di forze

$$F(x, y, z) = (x^2, y, z^3)$$

è conservativo e in caso affermativo calcolare un potenziale.

Esercizio 7

Risoluzione

Osserviamo innanzitutto che il campo F è definito in $\mathbb{R}^3$. Risulta

$$\frac{\partial}{\partial z} F_1 = \frac{\partial}{\partial x} F_3$$

$$\frac{\partial}{\partial x} F_2 = \frac{\partial}{\partial y} F_1$$

$$\frac{\partial}{\partial y} F_3 = \frac{\partial}{\partial z} F_2$$

e quindi il campo di forze è irrotazionale. Poiché l'insieme di definizione è stellato, il campo è conservativo.

Esercizio 7

Per trovare un potenziale f occorre risolvere il sistema:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = x^2 \\ f_y(x,y) = y \\ f_z(x,y) = z^3. \end{cases}$$

Integrando la prima delle due equazioni rispetto alla variabile x si ottiene

$$f(x,y,z) = \frac{x^3}{3} + g(y,z) \tag{2}$$

con $g(y,z)$ funzione differenziabile da determinare utilizzando le altre due equazioni. Derivando la relazione (**??**) rispetto a y e imponendo la seconda delle equazioni si ottiene:

$$f_y(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y} g(y,z) = y,$$

da cui si ricava

$$g(y,z) = \frac{y^2}{2} + h(z)$$

Esercizio 7

e quindi

$$f(x,y,z) = \frac{x^3}{3} + \frac{y^2}{2} + h(z) \tag{3}$$

con $h(z)$ funzione derivabile da determinare utilizzando l'altra equazione. Derivando la relazione (**??**) rispetto a z e imponendo la terza delle equazioni si ottiene:

$$h'(z) = z^3.$$

Si conclude dunque che l'insieme dei potenziali è dato da

$$f(x,y) = \frac{x^3}{3} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^4}{4} + K.$$

Esercizio 8.

Stabilire se il campo di forze

$$F(x, y, z) = (x - xe^z, -y, e^z)$$

è conservativo e in caso affermativo calcolare un potenziale.

Esercizio 8

Risoluzione

Osserviamo innanzitutto che il campo F è definito in $\mathbb{R}^3$. Si ha che

$$\frac{\partial}{\partial z} F_1(x, y, z) = -xe^z$$

$$\frac{\partial}{\partial x} F_3(x, y, z) = 0.$$

Il campo di forze non è, quindi, irrotazionale e di conseguenza non è conservativo.

2. Esercizi proposti

LEZIONE: FORME DIFFERENZIALI: ESERCIZI

Esercizi proposti

1) Stabilire se la forma differenziale
$$\omega = ydx + xdy$$
è esatta e in caso affermativo calcolare una primitiva. Inoltre calcolare l'integrale curvilineo di ω lungo la curva φ di equazione cartesiana
$$y = x^2,$$
con $0 \leq x \leq 1$, orientata nel verso delle x crescenti.

2) Stabilire se la forma differenziale
$$\omega = 2xydx + x^2dy$$
è esatta e calcolarne, se possibile, la primitiva che si annulla nel punto $(1, 1)$.

Esercizi proposti

3) Stabilire se il campo di forze

$$F(x,y) = (\frac{1}{x}, xy)$$

è conservativo.

4) Calcolare il lavoro compiuto dalla forza

$$F(x,y) = (y^2 + 2x, 2xy)$$

lungo la circonferanza di centro $C(1,2)$ e raggio 3.

Esercizi proposti: risoluzione

1) La forma differenziale ω è esatta, perché è chiusa in un insieme semplicemente connesso. Le primitive sono le funzioni $f(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + K$. L'integrale curvilineo di ω lungo la curva φ vale $f(1,1) - f(0,0)$.

2) La forma differenziale ω è esatta, perché è chiusa in un insieme semplicemente connesso. Le primitive sono le funzioni $f(x,y) = x^2y + K$. La primitiva che si annulla nel punto $(1,1)$ si ottiene per $K = -1$.

3) Il campo di forze non è irootazionale e quindi non è conservativo.

4) Il campo di forze F è conservativo, perchè irrotazionale in $\mathbb{R}^3$ e quindi il lavoro compiuto dalla forza lungo la circonferenza di centro $C(1,2)$ e raggio 3 è nullo.