3. Integrale curvilineo di una funzione

Cap. 5: CURVE E INTEGRALE CURVINEO

Integrale curvilneo di una funzione, premesse

Sia φ una curva regolare di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad t \in [a, b],$$

Sia f una funzione definita e continua sul sostegno $\varphi = \varphi([a, b])$.
In tali ipotesi ha senso considerare l'integrale

$$\int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

Se $\phi(s) = (\xi(s), \eta(s))$, $s \in [\alpha, \beta]$ é una qualunque altra rappresentazione parametrica di φ, si può dimostrare che

$$\int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt =$$

$$= \int_\beta^\alpha f(\xi(s), \eta(s)) \sqrt{(\xi'(s))^2 + (\eta'(s))^2} ds$$

Integrale curvilneo di una funzione, definizione

È ragionevole allora la seguente definizione

Definizione

Sia φ una curva regolare di equazioni parametriche $(x(t), y = y(t))$, $t \in [a, b]$, ed f una funzione definita e continua sul sostegno $\varphi([a, b])$. Si definisce l'integrale curvilineo di f nel seguente modo:

$$\int_{\varphi} fds = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$$

Proprietá

Dalla definizione di integrale curvilineo segue se φ é una curva regolare, e f, g sono funzioni continue sul sostegno di φ, risulta:

- $\int_\varphi (\alpha f + \beta g) ds = \alpha \int_\varphi fds + \beta \int_\varphi gds \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- $\int_\varphi fds \leq \int_\varphi gds, \qquad se \quad f \leq g \quad su \quad \varphi$
- $\mid \int_\varphi fds \mid \leq \int_\varphi \mid f \mid ds$
- Se $\varphi : [a, b] \longrightarrow R^2$ si spezza nell'unione delle curve regolari $\varphi_1 : [a, c] \longrightarrow R^2$, $\varphi_2 : [c, b] \longrightarrow R^2$, con $a < b < c$, si ha:

$$\int_\varphi fds = \int_{\varphi_1} fds + \int_{\varphi_2} fds \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Esempi.

- Calcolare il seguente integrale curvilineo

$$\int_{\varphi} xe^y\, ds \qquad \text{dove} \quad \varphi(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t) \;\text{ con } t \in [0, \pi]$$

Utilizzando la definizione si ha

$$\int_{\varphi} xe^y\, ds =$$

$$= \int_0^{\pi} \operatorname{sen} t\, e^{\cos t} \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t}\, dt = \left[-e^{\cos t}\right]_0^{\pi} = e - \frac{1}{e}$$

Esempi.

- Calcolare il seguente integrale curvilineo
  $\displaystyle\int_\varphi (x^2y-1)ds$ dove φ è l'arco di circonferenza di centro l'origine e raggio 1 che giace nel primo quadrante.

  Una rappresentazione parametrica di φ è data da
  $\varphi(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ con $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
  Allora
  $$\int_\varphi (x^2y-1)ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t \operatorname{sen} t - 1)\sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t}\,dt =$$
  $$= -\left[\frac{\cos^3 t}{3} - t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}$$

Sia φ una linea materiale non omogenea di densità materiale ϱ. Sia $\varphi : [a, b] \longrightarrow R^2$ una parametrizzazione di φ, si definisce *massa totale* di φ:

$$m = \int_{\varphi} \varrho ds$$

Se il corpo é omogeneo, ovvero se ϱ é costante, risulta:

$$m = \varrho L(\varphi).$$

Si definisce *baricentro* di φ il punto di coordinate (x_0, y_0) date da

$$x_0 = \frac{1}{L(\varphi)} \int_{\varphi} x ds, \qquad y_0 = \frac{1}{L(\varphi)} \int_{\varphi} y ds.$$

Applicazioni fisiche dell'integrale curvilineo un esempio

- Determinare il baricentro di una semicirconfrenza omogenea di raggio r.
  Una rappresentazione parametrica di φ è data da

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r \operatorname{sen} t \end{cases} \qquad t \in [0, \pi],$$

  Poichè risulta
  $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \sqrt{r^2\cos^2 + r^2 \operatorname{sen}^2} = r$, allora
  $L(\varphi) = \int_0^\pi r dt = \pi r$, dunque

$$x_0 = \frac{1}{\pi r}\int_0^\pi r\cos t\, r\, dt = \frac{1}{\pi r}\int_0^\pi r^2 \cos t dt = \frac{r}{\pi}[\operatorname{sen} t]_0^\pi = 0$$

$$y_0 = \frac{1}{\pi r}\int_0^\pi r \operatorname{sen} t\, r\, dt = \frac{1}{\pi r}\int_0^\pi r^2 \operatorname{sen} t dt = \frac{r}{\pi}[-\cos t]_0^\pi = \frac{2r}{\pi}$$