2. Lunghezza di una curva e ascissa curvilinea

Cap. 5: CURVE E INTEGRALE CURVINEO

Lunghezza di una curva

Definizione

Sia $\varphi : [a, b] \longrightarrow R^2$ una curva regolare, e siano $\varphi(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$ le sue equazioni parametriche, allora si definisce lunghezza dell'arco di curva φ il numero

$$L(\varphi) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$$

Osservazione

Sia $f \in C^1([a, b])$, allora $y = f(x)$, è l'equazione cartesiana di una curva regolare φ e

$$L(\varphi) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}dx$$

Teorema di rettificabilità

Tale definizione, operativamente utile per il calcolo della lunghezza di una curva, si giustifica geometricamente con il seguente teorema

Teorema (Teorema di rettificabilità)

Sia φ una curva regolare, allora è finito l'estremo superiore delle lunghezze delle poligonali inscritte sulla curva e inoltre $L(\varphi)$ risulta essere uguale all'estremo superiore delle lunghezze delle poligonali inscritte su essa

Esempi.

- Calcolare la lunghezza dell'arco di curva φ:

$$\begin{cases} x = e^t \operatorname{sen} t \\ y = e^t \cos t \end{cases} \qquad t \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

φ é una curva regolare, poiché è continua con le sue derivate prime e risulta:

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 = (e^t \operatorname{sen} t + e^t \cos t)^2 + (e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t)^2 =$$

$$= 2e^{2t}(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t) = 2e^{2t} > 0, \quad \forall t \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

Pertanto la sua lunghezza é data da:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2e^{2t}} dt = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t dt = \sqrt{2} \left[e^t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}(e^{\frac{\pi}{2}} - 1)$$

Esempi

- Calcolare la lunghezza dell'arco di curva curva φ di equazione $y = \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, $x \in [0, 1]$.
  φ é una curva regolare, poiché $y = \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ è di classe $C^1([0, 1])$. Osserviamo che $y' = \frac{2}{3}\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = x^{\frac{1}{2}}$.
  Pertanto la sua lunghezza é data da:

$$\int_0^1 \sqrt{1 + (x^{\frac{1}{2}})^2}dx = \int_0^1 \sqrt{1 + x}dx = \left[\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1)$$

Curve equivalenti

Definizione

Due curve $\varphi : I \longrightarrow R^2$,$\psi : J \longrightarrow R^2$ si dicono *equivalenti* se esiste un applicazione g di classe C^1 di in I in J tale che

- $g'(t) \neq 0, \forall t \in I$,
- $\varphi(t) = \psi(g(t)), \forall t \in I$.

L'applicazione g è detta *cambiamento ammissibile di parametro*

Naturalmente essendo g invertibile perchè strettamente monotona anche g^{-1} è di classe C^1 di J in I, $(g^{-1})'(s) \neq 0, \forall s \in J$ e inoltre $\psi(t) = \varphi(g^{-1}(s)), \forall s \in J$. Dunque anche g^{-1} è un cambiamento ammissibile di parametro.

Osservazione

Due curve equivalenti hanno lo stesso sostegno.

Orientamento di una curva

Ad ogni curva si può associare un verso di percorrenza indotto dalla rappresentazione parametrica fissata.
Sia $\varphi : [a, b] \longrightarrow R^2$ una curva regolare, e siano $\varphi(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$ le sue equazioni parametriche, allora il verso indotto dalla rappresentazione parametrica (o anche verso delle t crescenti) è quello così definito:
$P_1 = \varphi(t_1)$ precede $P_2 = \varphi(t_2)$ se $t_1 < t_2$.

Ascissa curvilinea

Siano $\varphi(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$ le equazioni parametriche di una curva regolare.

Fissato un punto $O = \varphi(t_0)$ (origine del riferimento), un orientamento sulla curva, allora si definisce l'ascissa curvilinea di un punto $P = \varphi(t)$ come la lunghezza dell'arco di curva di estremi O e P se O precede P nel verso positivo prefissato, il suo opposto se P precede O nel verso positivo prefissato.

In altri termini l'ascissa curvilinea di un punto $P = \varphi(t)$ è definita da

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{(x'(\tau))^2 + (y'(\tau))^2} d\tau, \quad t \in [a, b]$$

La funzione $s = s(t)$ è C^1 ed è strettamente crescente (infatti $s'(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} > 0$).
Dunque è un cambiamento ammissibile di parametro.
Considerando la funzione inversa $t = t(s)$ è possibile riparametrizzare la curva in funzione del parametro s:
$\gamma(s) = \varphi(t(s))$.
Rispetto a tale rappresentazione parametrica il vettore tangente è dato da $\gamma'(s)$.