# 1. Curve regolari nel piano

LEZIONE: CURVE NEL PIANO E NELLO SPAZIO

# Definizione di curva piana

## Definizione

Sia $I$ un intervallo di $\mathbb{R}$. Si dice curva piana, o cammino in $\mathbb{R}^2$, un'applicazione continua

$$\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

dove per ogni $t \in I$, $\varphi(t)$ è il punto di coordinate $(x(t), y(t))$.

Le equazioni

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad t \in I,$$

sono dette equazioni parametriche della curva di parametro $t$.

Il sostegno della curva è l'immagine $\varphi(I)$ della funzione, cioè l'insieme dei punti di coordinate $(x(t), y(t))$, con $t \in I$.

# Curve piane

## Osservazione

Se la variabile $t$ denota il tempo, una curva piana è la legge oraria di un punto mobile e il sostegno è la traiettoria del punto mobile.

## Definizione

Una curva $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ si dice semplice se comunque presi due punti $t_1 \neq t_2$ di $I$ non entrambi estremi dell'intervallo, risulta $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$.

Una curva $\varphi$ definita in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, si dice chiusa se $\varphi(a) = \varphi(b)$.

**Esempio 1. Retta**

Sia assegnato il punto $(x_0, y_0)$ e la direzione $(\alpha, \beta)$. La curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R},$$

ha per sostegno la retta che passa per il punto $(x_0, y_0)$ e avente direzione $(\alpha, \beta)$. È una curva semplice.

**Esempio 2. Segmento**

Sia assegnato il punto $(x_0, y_0)$ e la direzione $(\alpha, \beta)$. La curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases} \qquad t \in [0, 1],$$

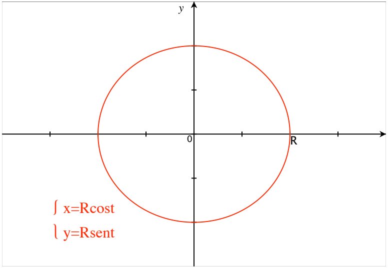
ha per sostegno il segmento di estremi $(x_0, y_0)$ e $(x_0 + \alpha, y_0 + \beta)$. È una curva semplice.

### Esempio 3. Circonferenza

La curva $\varphi_1$ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\,\mathrm{sen}\, t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi],$$

con $R > 0$ ha per sostegno la circonferenza di centro l'origine e raggio R. È una curva semplice e chiusa (infatti $\varphi_1(0) = \varphi_1(2\pi)$).



# Esempi di curve piane: la circonferenza

Osserviamo esplicitamente che la curva $\varphi_2$ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\,\mathrm{sen}\, t \end{cases} \qquad t \in [0, 3\pi],$$

ha lo stesso sostegno di $\varphi_1$, ma le curve $\varphi_1$ e $\varphi_2$ chiaramente non coincidono avendo insiemi di definizione diversi. La curva $\varphi_2$ non è né semplice né chiusa.

Sia dato il punto $(x_0, y_0)$. La curva $\varphi_3$ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x_0 + R\cos t \\ y = y_0 + R\,\mathrm{sen}\, t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi],$$

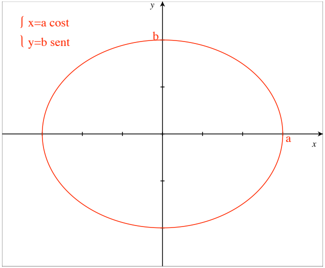
con $R > 0$ ha per sostegno la circonferenza di centro $(x_0, y_0)$ e raggio R. È una curva semplice e chiusa.

### Esempio 4. Ellisse

La curva $\varphi$ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\,\mathrm{sen}\, t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi],$$

ha per sostegno l' ellisse di centro l'origine, semiasse maggiore $a$ e semiasse minore $b$ ( la cui equazione cartesiana è $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$). È una curva semplice e chiusa.



**Definizione**

Sia $I$ un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$.
Diremo che la curva $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é regolare se:

$i)$ $\varphi \in C^1([a, b])$

$ii)$ $\varphi'(t) = (x'(t), y'(t)) \neq (0, 0)$, per ogni $t \in ]a, b[$.

**Osservazione**

La ii) è equivalente alla seguente condizione:

$ii)'$ $\|\varphi'(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} > 0, \quad \forall t \in ]a, b[$.

Le curve degli esempi 1, 2, 3, 4 sono curve regolari.

# Esempi di curve non regolari

- La curva
$$\begin{cases} x = t \\ y = |t| \end{cases} \qquad t \in [-1, 1].$$
è non regolare perché $y(t) = |t|$ non è di classe $C^1$.

- La curva $\varphi$
$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases} \qquad t \in [-1, 1].$$
è non regolare perché $\|\varphi'(0)\| = 0$.

# Curve regolari a tratti

## Definizione

Una curva di equazioni parametriche $\varphi(t)$ con $t \in I$ è detta regolare a tratti se $\varphi \in C^0(I)$ e l'intervallo $I$ può essere suddiviso in un numero finito di sottointervalli, cioè $I = I_1 \cup \ldots \cup I_m$, e $\varphi|_{I_j}$ è una curva regolare per ogni $j = 1, \ldots, m$.

## Definizione

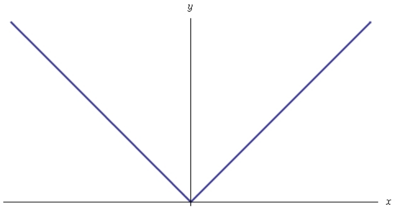
Date due curve di equazioni parametriche $\varphi_1(t)$ con $t \in [a, b]$ e $\varphi_2(t)$ con $t \in [b, c]$ tali che $\varphi_1(b) = \varphi_2(b)$. L'unione delle due curve è la curva di equazioni parametriche

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_1(t) & t \in [a, b] \\ \varphi_2(t) & t \in [b, c] \end{cases}$$

Una curva regolare a tratti è unione di un numero finito di curve regolari.

# Curve regolari a tratti: esempi

La curva $\varphi(t) = (t, |t|)$ con $t \in [-1, 1]$ è non regolare, ma è regolare a tratti. Infatti è unione della curva regolare $\varphi_1(t) = (t, t)$ con $t \in [0, 1]$ e della curva regolare $\varphi_2(t) = (t, -t)$ con $t \in [-1, 0]$



# Grafico di funzione

**Osservazione**

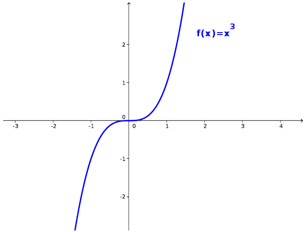
Sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione $C^1(I)$. Allora il grafico di $f$ di equazione $y = f(x)$ è sostegno di una curva regolare. L'equazione $y = f(x)$ si dice equazione cartesiana della curva.

Infatti, sia $f$ una funzione definita in un intervallo $I$ di $\mathbb{R}$, di classe $C^1(I)$. Il grafico di $f$ è il sostegno della curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases} \qquad t \in I.$$

Verifichiamo che è una curva regolare.
La condizione $i)$ è banalmente verificata. Inoltre $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \sqrt{1 + (f'(t))^2} > 0$ per ogni $t \in I$ e dunque anche la $ii)'$ è soddisfatta.

- Sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = x^3$. Il grafico di $f$ di equazione $y = x^3$ è sostegno della curva di equazioni parametriche
$$\begin{cases} x = t \\ y = t^3 \end{cases} \qquad t \in I.$$
La curva è regolare perché la funzione è di classe $C^1$.
L'equazione $y = x^3$ è l' equazione cartesiana della curva.



# Grafico di funzione: esempi

- Sia $f : [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = logx$. Il grafico di $f$ di equazione $y = logx$ è sostegno della curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = t \\ y = logt \end{cases} \qquad t \in [1,2].$$

La curva è regolare perché la funzione è di classe $C^1$.
L'equazione $y = logx$ è l' equazione cartesiana della curva.

# Versore tangente

Sia $\varphi$ una curva regolare definita in $I$ e $t_0 \in I$.

Il vettore $\varphi'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$ è detto vettore tangente alla curva $\varphi$ nel punto $\varphi(t_0)$.

Il versore

$$T(t_0)=\frac{\varphi'(t_0)}{\|\varphi'(t_0)\|}=\left(\frac{x'(t_0)}{\sqrt{(x'(t_0))^2+(y'(t_0))^2}}, \frac{y'(t_0)}{\sqrt{(x'(t_0))^2+(y'(t_0))^2}}\right)$$

si chiama versore tangente.
Chiameremo retta tangente alla curva in $\varphi(t_0)$ la retta di equazione

$$(x - x(t_0))y'(t_0) - (y - y(t_0))x'(t_0) = 0$$

# Versore normale

Si definisce versore normale alla curva $\varphi$ nel punto $\varphi(t_0)$, il versore

$$N(t_0) = \left( \frac{y'(t_0)}{\sqrt{(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2}}, \frac{-x'(t_0)}{\sqrt{(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2}} \right)$$

ottenuto ruotando $T(t_0)$ di $\frac{\pi}{2}$ in senso orario.

# Calcolo del vettore tangente e normale

- La curva $\varphi$
$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R},$$
ha vettore tangente $\varphi'(t) = (\alpha, \beta)$, versore tangente
$T(t) = (\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}})$ e versore normale
$N(t) = (\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \frac{-\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}})$.

  La retta tangente alla curva in $\varphi(t_0)$ è la curva stessa.

## Calcolo del vettore tangente e normale

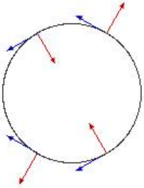
- La curva $\varphi$

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R \operatorname{sen} t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi],$$

ha vettore tangente $\varphi'(t) = (-R\operatorname{sen} t, R\cos t)$, versore tangente $T(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t)$ e versore normale $N(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$.

La retta tangente alla curva in $\varphi(t_0)$ è la retta di equazione

$$(x - R\cos t_0)(R\cos t_0) - (y - R\operatorname{sen} t_0))(-R\operatorname{sen} t_0) = 0$$



# Calcolo del vettore tangente e normale

- Sia $f \in C^1(I)$. La curva $\varphi$

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases} \qquad t \in I,$$

ha vettore tangente $\varphi'(t) = (1, f'(t))$, versore tangente $T(t) = (\frac{1}{\sqrt{1+(f'(t))^2}}, \frac{f'(t)}{\sqrt{1+(f'(t))^2}})$ e versore normale $N(t) = (\frac{f'(t)}{\sqrt{1+(f'(t))^2}}, -\frac{1}{\sqrt{1+(f'(t))^2}})$.
La retta tangente alla curva in $\varphi(t_0) = (t_0, f(t_0))$ è la retta di equazione

$$(x - t_0)f'(t_0) - (y - f(t_0)) = 0,$$

ovvero la retta tangente al grafico della funzione in $(t_0, f(t_0))$.

# Curve in coordinate polari

La curva piana

$$\rho = \rho(\theta) \quad \text{per } \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$$

in coordinate polari ha le seguenti equazioni in coordinate cartesiane

$$\begin{cases} x = \rho(\theta)\cos\theta \\ y = \rho(\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \qquad \text{per } \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1 .$$

Se $\rho$ è una funzione di classe $C^1$, si verifica facilmente che la curva è regolare se e solo se

$$[\rho(\theta)]^2 + [\rho'(\theta)]^2 > 0 \qquad \text{per } \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$$

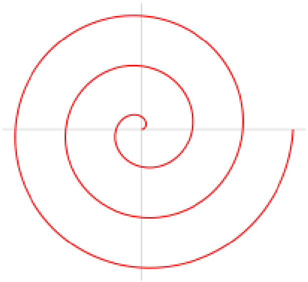
# Esempi di curve in coordinate polari

La spirale di Archimede è la curva di coordinate polari

$$\rho = A\theta \qquad \text{per } \theta \in [0, +\infty[$$

con $A > 0$. Essa è regolare, in quanto

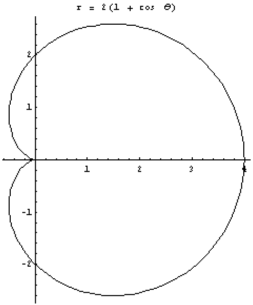
$$[\rho(\theta)]^2 + [\rho'(\theta)]^2 = A\sqrt{1+\theta^2} > 0 \qquad \text{per } \theta \in [0, +\infty[.$$



La cardioide è la curva di coordinate polari

$$\rho = a(1 + \cos\theta) \qquad \text{per } 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

con $a > 0$. Essa non è regolare, in quanto $\rho(\pi) = \rho'(\pi) = 0$.



Nel disegno $a = 2$.

# 2. Curve regolari nello spazio

LEZIONE: CURVE NEL PIANO E NELLO SPAZIO

# Definizione di curva nello spazio

## Definizione

Sia $I$ un intervallo di $\mathbb{R}$. Si dice curva nello spazio, o cammino in $\mathbb{R}^3$, un'applicazione continua

$$\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

dove per ogni $t \in I$, $\varphi(t)$ è il punto di coordinate $(x(t), y(t), z(t))$.

Le equazioni

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad t \in I,$$

sono dette equazioni parametriche della curva di parametro $t$.

Il sostegno della curva è l'immagine $\varphi(I)$ della funzione, cioè l'insieme dei punti di coordinate $(x(t), y(t), z(t))$, con $t \in I$.

# Curve nello spazio

## Definizione

Sia $I$ un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$.
Diremo che la curva $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é regolare se:

$i)$ $\varphi \in C^1([a, b])$

$ii)$ $\varphi'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) \neq (0, 0, 0)$, per ogni $t \in ]a, b[$.

## Definizione

Una curva $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ si dice semplice se comunque presi due punti $t_1 \neq t_2$ di $I$ non entrambi estremi dell'intervallo, risulta $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$.

Una curva $\varphi$ definita in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, si dice chiusa se $\varphi(a) = \varphi(b)$.

**Esempio 1. Retta**

La curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R},$$

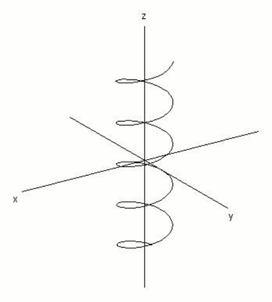
ha per sostegno una retta nello spazio che passa per il punto $(x_0, y_0, z_0)$ e avente direzione $(\alpha, \beta, \gamma)$. È una curva regolare e semplice.

**Esempio 2. Elica cilindrica**

La curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\,\mathrm{sen}\, t \\ z = bt \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $a > 0$ e $b \neq 0$ ha per sostegno l'elica cilindrica di passo $2\pi b$. È una curva regolare e semplice.



**Esempio 3.**

Consideriamo la curva piana

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad t \in I,$$

La curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z_0 \end{cases} \qquad t \in I,$$

con $z_0 \in \mathbb{R}$ è una curva nello spazio. È una curva regolare e semplice se lo è la curva piana di partenza.

# Versore tangente

Sia $\varphi$ una curva regolare definita in $I$ e $t_0 \in I$.

Il vettore $\varphi'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ è detto vettore tangente alla curva $\varphi$ nel punto $\varphi(t_0)$.

Il versore

$$T(t_0) = \frac{\varphi'(t_0)}{\|\varphi'(t_0)\|}$$

si chiama versore tangente.
Chiameremo retta tangente alla curva in $\varphi(t_0)$ la retta di equazione

$$\begin{cases} x = x(t_0) + x'(t_0)(t - t_0) \\ y = y(t_0) + y'(t_0)(t - t_0) \\ z = z(t_0) + z'(t_0)(t - t_0) \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

# Calcolo del vettore tangente

- La curva $\varphi$

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R},$$

ha vettore tangente $\varphi'(t) = (\alpha, \beta, \gamma)$ e versore tangente

$$T(t) = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}, \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}, \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}\right).$$

La retta tangente alla curva in $\varphi(t_0)$ è la curva stessa.

# 3. Curve equivalenti

LEZIONE: CURVE NEL PIANO E NELLO SPAZIO

Per semplicità consideriamo solo curve piane.
Quanto diremo può essere generalizzato al caso di curve nello spazio.

**Definizione**

Due curve $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$,$\psi : J \longrightarrow \mathbb{R}^2$ si dicono *equivalenti* se esiste un' applicazione g di classe $C^1$ di in $I$ in $J$ tale che

- $g'(t) \neq 0, \forall t \in I$,
- $\varphi(t) = \psi(g(t)), \forall t \in I$.

L'applicazione $g$ è detta *cambiamento ammissibile di parametro*

Naturalmente essendo $g$ invertibile perchè strettamente monotona anche $g^{-1}$ è di classe $C^1$ di $J$ in $I$, $(g^{-1})'(s) \neq 0, \forall s \in J$ e inoltre $\psi(t) = \varphi(g^{-1}(s)), \forall s \in J$. Dunque anche $g^{-1}$ è un cambiamento ammissibile di parametro.

**Osservazione**

Due curve equivalenti hanno lo stesso sostegno.

# Ossevazione

La relazione di essere equivalenti è una relazione di equivalenza. Essa determina una decomposizione della famiglia delle curve regolari in classi di equivalenza a due a due disgiunte. Nel seguito useremo il termine curva sia per indicare una classe di equivalenza, sia per indicare una qualunque delle sue rappresentazioni parametriche. Sarà chiaro dal contesto, in quale dei due sensi è usato tale termine.

# Esempio di cambiamento ammissibile di parametro

Le curve

$$\varphi(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

e

$$\psi(s) = (\cos 2s, \operatorname{sen} 2s) \quad s \in [0, \pi]$$

sono equivalenti.

Infatti $\varphi(t) = \psi(g(t))$, dove $g(t) = \frac{t}{2}$ è il cambiamento ammissibile di parametro. Infatti la funzione $g$ è di classe $C^1$ e $g'(t) \neq 0$ per $t \in [0, 2\pi]$.

# Orientamento di una curva

Sia assegnata una curva di equazioni parametriche $\varphi(t)$ con $t \in I$. È evidente che sul sostegno $\varphi(I)$ della curva si possono fissare due versi di percorrenza: il verso positivo, denotato con $\varphi_+$, e il verso negativo, denotato con $\varphi_-$.
In particolare, ad ogni curva si può associare un verso di percorrenza indotto dalla rappresentazione parametrica fissata.
Sia $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regolare, e siano $\varphi(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$ le sue equazioni parametriche, allora il verso indotto dalla rappresentazione parametrica (o anche verso delle t crescenti) è quello così definito:
$P_1 = \varphi(t_1)$ precede $P_2 = \varphi(t_2)$ se $t_1 < t_2$.

# Verso indotto dalla rappresentazione parametrica

**Segmento**
Sia data la curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases} \qquad t \in [0, 1].$$

Il verso indotto dalla rappresentazione parametrica è quello dall' estremo $(x_0, y_0)$ all'estremo $(x_0 + \alpha, y_0 + \beta)$.

**Circonferenza**
Sia data la curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\,\mathrm{sen}\, t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Il verso di percorrenza indotto dalla rappresentazione parametrica è quello antiorario.