1. Problema di Cauchy per equazioni differenziali. Teoremi di esistenza e unicità

Cap. 4: EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Prime definizioni

Definizione

Sia f una funzione continua in un aperto A di $\mathbb{R}$, sia $y = y(x)$ una funzione derivabile tale che $(x, y(x)) \in A$, al variare di x in un intervallo I di $\mathbb{R}$. Se risulta

$$y'(x) = f(x, y(x)), \forall x \in I,$$

si dice che y è soluzione dell'equazione differenziale del primo ordine

$$y' = f(x, y). \tag{1}$$

Primo esempio

L'esempio più semplice di equazione differenziale è $y' = f(x)$ con f funzione continua in un intervallo $[a, b]$.

Primo esempio

L'esempio più semplice di equazione differenziale è $y' = f(x)$ con f funzione continua in un intervallo $[a, b]$.
Le soluzioni sono le primitive di f, cioè tutte le funzioni che si ottengono formalmente integrando il secondo membro dell'equazione, ossia le funzioni

$$y(x) = \int_x^a f(t)dt + c$$

con c costante arbitraria.
Tale primo semplice esempio evidenzia il fatto che che le soluzioni di un'equazione differenziale del primo ordine dipendono dalla scelta di una costante arbitraria, per cui non è possibile determinare univocamente una soluzione, a meno che non si imponga alla soluzione una ulteriore condizione.

Se per esempio si impone alla soluzione di assumere un dato valore y_0 in un assegnato punto x_0, si ottiene il seguente problema, detto problema di Cauchy o problema a valori iniziali:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{2}$$

Prime definizioni

Se per esempio si impone alla soluzione di assumere un dato valore y_0 in un assegnato punto x_0, si ottiene il seguente problema, detto problema di Cauchy o problema a valori iniziali:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{2}$$

dove supponiamo che $(x, y(x)) \in A$.

Esempio: il modello di *Malthus*

Un altro semplice esempio di equazione differenziale del primo ordine è l'equazione che descrive il modello di *Malthus* in dinamica delle popolazioni. Si consideri una popolazione isolata e si denoti con $N(t)$ il numero di individui vivi all'istante t; se si assume che il fattore di crescita sia influenzato solo dal tasso di natalità λ e da quello di mortalità μ, la variazione della popolazione nell'intervallo $[t, t+h]$ soddisfa la seguente condizione

$$\frac{N(t+h) - N(t)}{h} = (\lambda - \mu) N(t)$$

Esempio: il modello di *Malthus*

Un altro semplice esempio di equazione differenziale del primo ordine è l'equazione che descrive il modello di *Malthus* in dinamica delle popolazioni. Si consideri una popolazione isolata e si denoti con $N(t)$ il numero di individui vivi all'istante t; se si assume che il fattore di crescita sia influenzato solo dal tasso di natalità λ e da quello di mortalità μ, la variazione della popolazione nell'intervallo $[t, t+h]$ soddisfa la seguente condizione

$$\frac{N(t+h) - N(t)}{h} = (\lambda - \mu) N(t)$$

Facendo tendere h a zero si ottiene

$$N'(t) = (\lambda - \mu) N(t) . \tag{3}$$

Esempio: il modello di *Malthus*

Le funzioni

$$N(t) = ce^{(\lambda-\mu)t},$$

dove c indica una costante arbitraria, rappresentano tutte le soluzioni di (3). Se si conosce il numero degli individui vivi all'istante $t = 0$, cioè se si impone la condizione iniziale

$$N(0) = N_0, \tag{4}$$

si ottiene la soluzione

$$N(t) = N_0 e^{(\lambda-\mu)t},$$

che descrive l'andamento temporale della consistenza della popolazione.

Esempio: il modello di *Malthus*

Di solito in dinamica delle popolazioni si sostituisce l'equazione (3) con la

$$N'(t) = \epsilon N(t)\left(1 - \frac{N(t)}{k}\right), \epsilon, k > 0 \tag{5}$$

in cui viene evidenziato un termine correttivo, il quale modellizza il fatto che, maggiore è il numero di individui, minori sono le risorse a disposizione di ciascuno, per cui minori sono le possibilità di crescita della popolazione.

Esempio: il modello di *Malthus*

Di solito in dinamica delle popolazioni si sostituisce l'equazione (3) con la

$$N'(t) = \epsilon N(t)\left(1 - \frac{N(t)}{k}\right), \epsilon, k > 0 \qquad (5)$$

in cui viene evidenziato un termine correttivo, il quale modellizza il fatto che, maggiore è il numero di individui, minori sono le risorse a disposizione di ciascuno, per cui minori sono le possibilità di crescita della popolazione. Imponendo la condizione iniziale (4) si perviene alla soluzione

$$N(t)) = \frac{kN_0 e^{\epsilon t}}{k - N_0 + N_0 e^{\epsilon t}}.$$

Esempi

Consideriamo l'equazione differenziale

$$y' = y^2. \tag{6}$$

Tutte le soluzioni di quest'ultima sono date da

$$y(x) = \frac{c}{1 - cx},$$

con $c \in \mathbb{R}$ costante arbitraria. E' dunque chiaro che se si vuole determinare una soluzione particolare, bisogna fissare una condizione iniziale.

Consideriamo l'equazione differenziale

$$y' = y^2. \tag{6}$$

Tutte le soluzioni di quest'ultima sono date da

$$y(x) = \frac{c}{1 - cx},$$

con $c \in \mathbb{R}$ costante arbitraria. E' dunque chiaro che se si vuole determinare una soluzione particolare, bisogna fissare una condizione iniziale.
Si può anche notare che l'insieme di definizione della soluzione *varia* al variare della condizione iniziale. Ad esempio, la soluzione della (6) soddisfacente la condizione $y(0) = 1$ è $y(x) = \frac{1}{1-x}$, mentre la soluzione soddisfacente la $y(1) = 1$ è $y(x) = \frac{1}{2-x}$.

Osservazioni

In ciascuno degli esempi illustrati, abbiamo determinato l'insieme delle soluzioni dell'equazione in esame, il cosiddetto *integrale generale* dell'equazione; abbiamo successivamente verificato che il problema di Cauchy associato all'equazione ammette, di fatto, un'unica soluzione, di cui siamo stati in grado di scriverne l'esplicita espressione analitica.

Osservazioni

In ciascuno degli esempi illustrati, abbiamo determinato l'insieme delle soluzioni dell'equazione in esame, il cosiddetto *integrale generale* dell'equazione; abbiamo successivamente verificato che il problema di Cauchy associato all'equazione ammette, di fatto, un'unica soluzione, di cui siamo stati in grado di scriverne l'esplicita espressione analitica.

Non sempre ci si trova dinanzi ad una situazione tanto semplice.

In generale bisogna anzitutto individuare le giuste ipotesi che assicurino *l'esistenza* e *l'unicità* della soluzione del problema di Cauchy. Successivamente, si prova a determinare la soluzione in forma esplicita.

In ciascuno degli esempi illustrati, abbiamo determinato l'insieme delle soluzioni dell'equazione in esame, il cosiddetto *integrale generale* dell'equazione; abbiamo successivamente verificato che il problema di Cauchy associato all'equazione ammette, di fatto, un'unica soluzione, di cui siamo stati in grado di scriverne l'esplicita espressione analitica.
Non sempre ci si trova dinanzi ad una situazione tanto semplice.
In generale bisogna anzitutto individuare le giuste ipotesi che assicurino *l'esistenza* e *l'unicità* della soluzione del problema di Cauchy. Successivamente, si prova a determinare la soluzione in forma esplicita. Per ciò che concerne la questione relativa all'esistenza e all'unicità della soluzione, ci limitiamo a enunciare i seguenti teoremi, noti come *teorema di esistenza ed unicità locale* e *teorema di esistenza ed unicità globale*.

Teorema (Teorema di esistenza ed unicità locale)

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua in un aperto A di $\mathbb{R}^2$. Fissato $(x_0, y_0) \in A$, siano $a, b > 0$ tali che

$$[x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \subseteq A$$

Supponiamo che esista una costante $L > 0$ tale che per ogni $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$ risulti

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2|\,, \ \forall y_1, y_2 \in [y_0 - b, y_0 + b] \tag{7}$$

Teorema di esistenza ed unicità locale

Teorema (Teorema di esistenza ed unicità locale)

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una funzione continua in un aperto* A *di* $\mathbb{R}^2$. *Fissato* $(x_0, y_0) \in A$, *siano* $a, b > 0$ *tali che*

$$[x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \subseteq A$$

Supponiamo che esista una costante $L > 0$ *tale che per ogni* $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$ *risulti*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|, \ \forall y_1, y_2 \in [y_0 - b, y_0 + b] \tag{7}$$

Allora è possibile determinare un numero $\delta \in]0, a]$ *tale che il problema di Cauchy (2) ammette una ed una sola soluzione* $y = y(x)$ *definita nell'intervallo* $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

Osservazione

La denominazione "locale" del teorema precedente si riferisce al fatto che la soluzione del problema di Cauchy esiste ed è unica, solo in un *intorno* del punto iniziale x_0, la cui ampiezza dipende dalla posizione dello stesso punto (x_0, y_0).
A tal proposito, è utile ricordare l'esempio (6), dove questa caratteristica si manifesta in maniera evidente.

Teorema di esistenza ed unicità globale

Teorema (Teorema di esistenza ed unicità globale)

Supponiamo che la funzione f sia definita in una striscia di piano, cioè in un insieme del tipo $I \times \mathbb{R}$, ove I è un intervallo dell'asse reale; supponiamo altresì che valga la condizione (7) per ogni $x \in I$ ed ogni $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.
Allora, se $x_0 \in I$ ed $y_0 \in \mathbb{R}$, il problema di Cauchy (2) ammette una ed una soluzione $y = y(x)$ definita in tutto l'intervallo iniziale I.

Osservazione

La (7) è nota come *condizione di Lipschitz* rispetto ad y, uniformemente rispetto ad x. Affinchè essa valga, basta supporre che f sia dotata di derivata parziale rispetto ad y, e che tale deivata sia altresì limitata.

Osservazione

La (7) è nota come *condizione di Lipschitz* rispetto ad y, uniformemente rispetto ad x. Affinchè essa valga, basta supporre che f sia dotata di derivata parziale rispetto ad y, e che tale deivata sia altresì limitata.

Osservazione

La condizione (7) è essenziale per ciò che concerne l'unicità della soluzione. Ad esempio, l'equazione

$$y' = 2\sqrt{|y|}$$

ammette come soluzioni la funzione identicamente nulla e la funzione $y(x) = x^2$, le quali soddisfano *entrambe* la condizione iniziale $y(0) = 0$.