2 Equazioni lineari del primo ordine. Equazioni del primo ordine a variabili separabili.

Cap. 4: EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Un'equazione differenziale lineare del primo ordine è un equazione lineare in y ed y', cioè del tipo

Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Un'equazione differenziale lineare del primo ordine è un equazione lineare in y ed y', cioè del tipo

$$y' + a(x)\,y = b(x) \tag{1}$$

Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Un'equazione differenziale lineare del primo ordine è un equazione lineare in y ed y', cioè del tipo

$$y' + a(x)\,y = b(x) \tag{1}$$

ove le funzioni a, b sono per ipotesi continue su un intervallo I di $\mathbb{R}$.

Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Un'equazione differenziale lineare del primo ordine è un equazione lineare in y ed y', cioè del tipo

$$y' + a(x)\, y = b(x) \tag{1}$$

ove le funzioni a, b sono per ipotesi continue su un intervallo I di $\mathbb{R}$.

In base al teorema di esistenza ed unicità in grande, l'unica soluzione $y = y(x)$ del problema di Cauchy

Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Un'equazione differenziale lineare del primo ordine è un equazione lineare in y ed y', cioè del tipo

$$y' + a(x)\, y = b(x) \tag{1}$$

ove le funzioni a, b sono per ipotesi continue su un intervallo I di $\mathbb{R}$.
In base al teorema di esistenza ed unicità in grande, l'unica soluzione $y = y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + a(x)\, y = b(x) \\ \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Un'equazione differenziale lineare del primo ordine è un equazione lineare in y ed y', cioè del tipo

$$y' + a(x)\, y = b(x) \tag{1}$$

ove le funzioni a, b sono per ipotesi continue su un intervallo I di $\mathbb{R}$.
In base al teorema di esistenza ed unicità in grande, l'unica soluzione $y = y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + a(x)\, y = b(x) \\ \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

con $x_0 \in I$ ed $y_0 \in \mathbb{R}$, è definita in tutto l'intervallo I .

Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Al fine di ottenere l'integrale generale della (1), risolviamo anzitutto l'equazione omogenea associata

$$y' + a\,(x)\,y = 0. \tag{2}$$

Al fine di ottenere l'integrale generale della (1), risolviamo anzitutto l'equazione omogenea associata

$$y' + a(x)\,y = 0. \tag{2}$$

Detta $A(x)$ una primitiva di $a(x)$, cioè tale che $A'(x) = a(x)$, moltiplichiamo ambo i membri della (2) per $e^{A(x)}$, ottenendo così

Al fine di ottenere l'integrale generale della (1), risolviamo anzitutto l'equazione omogenea associata

$$y' + a(x)\, y = 0. \tag{2}$$

Detta $A(x)$ una primitiva di $a(x)$, cioè tale che $A'(x) = a(x)$, moltiplichiamo ambo i membri della (2) per $e^{A(x)}$, ottenendo così

$$y' e^{A(x)} + a(x)\, e^{A(x)} y = \frac{d}{dx}\left(e^{A(x)} y\right) = 0$$

Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Al fine di ottenere l'integrale generale della (1), risolviamo anzitutto l'equazione omogenea associata

$$y' + a(x)\,y = 0. \tag{2}$$

Detta $A(x)$ una primitiva di $a(x)$, cioè tale che $A'(x) = a(x)$, moltiplichiamo ambo i membri della (2) per $e^{A(x)}$, ottenendo così

$$y' e^{A(x)} + a(x)\, e^{A(x)} y = \frac{d}{dx}\left(e^{A(x)} y\right) = 0$$

quindi

Al fine di ottenere l'integrale generale della (1), risolviamo anzitutto l'equazione omogenea associata

$$y' + a(x)\, y = 0. \tag{2}$$

Detta $A(x)$ una primitiva di $a(x)$, cioè tale che $A'(x) = a(x)$, moltiplichiamo ambo i membri della (2) per $e^{A(x)}$, ottenendo così

$$y' e^{A(x)} + a(x)\, e^{A(x)} y = \frac{d}{dx}\left(e^{A(x)} y\right) = 0$$

quindi

$$e^{A(x)} y = c,$$

con c costante arbitraria. Allora l'integrale generale della (2) è dato da

Al fine di ottenere l'integrale generale della (1), risolviamo anzitutto l'equazione omogenea associata

$$y' + a(x)\,y = 0. \tag{2}$$

Detta $A(x)$ una primitiva di $a(x)$, cioè tale che $A'(x) = a(x)$, moltiplichiamo ambo i membri della (2) per $e^{A(x)}$, ottenendo così

$$y' e^{A(x)} + a(x)\,e^{A(x)} y = \frac{d}{dx}\left(e^{A(x)} y\right) = 0$$

quindi

$$e^{A(x)} y = c,$$

con c costante arbitraria. Allora l'integrale generale della (2) è dato da

$$y = ce^{-A(x)} \tag{3}$$

Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Al fine di ottenere l'integrale generale della (1), risolviamo anzitutto l'equazione omogenea associata

$$y' + a(x)\, y = 0. \tag{2}$$

Detta $A(x)$ una primitiva di $a(x)$, cioè tale che $A'(x) = a(x)$, moltiplichiamo ambo i membri della (2) per $e^{A(x)}$, ottenendo così

$$y' e^{A(x)} + a(x)\, e^{A(x)} y = \frac{d}{dx}\left(e^{A(x)} y\right) = 0$$

quindi

$$e^{A(x)} y = c,$$

con c costante arbitraria. Allora l'integrale generale della (2) è dato da

$$y = ce^{-A(x)} \tag{3}$$

con $c \in \mathbb{R}$.

Per determinare l'integrale generale della (1) basta determinare una soluzione particolare.

Per determinare l'integrale generale della (1) basta determinare una soluzione particolare. Difatti, se $\overline{y}$ è tale soluzione, sia y una qualsiasi soluzione della (1). Allora, troviamo

Per determinare l'integrale generale della (1) basta determinare una soluzione particolare. Difatti, se $\overline{y}$ è tale soluzione, sia y una qualsiasi soluzione della (1). Allora, troviamo

$$(y-\overline{y})' + a(x)\,(y-\overline{y}) = 0$$

Per determinare l'integrale generale della (1) basta determinare una soluzione particolare. Difatti, se $\overline{y}$ è tale soluzione, sia y una qualsiasi soluzione della (1). Allora, troviamo

$$(y - \overline{y})' + a(x)(y - \overline{y}) = 0$$

e dall'espressione (3) dell'integrale generale dell'omogenea associata, si ha

$$y(x) = ce^{-A(x)} + \overline{y}(x)$$

Per determinare l'integrale generale della (1) basta determinare una soluzione particolare. Difatti, se $\overline{y}$ è tale soluzione, sia y una qualsiasi soluzione della (1). Allora, troviamo

$$(y - \overline{y})' + a(x)(y - \overline{y}) = 0$$

e dall'espressione (3) dell'integrale generale dell'omogenea associata, si ha

$$y(x) = ce^{-A(x)} + \overline{y}(x)$$

che fornisce esattamente l'integrale generale della (1).

Basta, dunque, descrivere un opportuno metodo che consenta di determinare una soluzione particolare della (1). Tale metodo è noto come *metodo della variazione della costante*, dovuto a Lagrange, e consiste nel cercare una soluzione $\overline{y}$ della forma

Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Basta, dunque, descrivere un opportuno metodo che consenta di determinare una soluzione particolare della (1). Tale metodo è noto come *metodo della variazione della costante*, dovuto a Lagrange, e consiste nel cercare una soluzione $\overline{y}$ della forma

$$\overline{y} = c\left(x\right) e^{-A\left(x\right)}, \tag{4}$$

ove $c\left(x\right)$ è una opportuna funzione da determinare.
Imponendo che la (5) sia soluzione della (1), si ottiene che $c\left(x\right)$ deve soddisfare la seguente equazione

Basta, dunque, descrivere un opportuno metodo che consenta di determinare una soluzione particolare della (1). Tale metodo è noto come *metodo della variazione della costante*, dovuto a Lagrange, e consiste nel cercare una soluzione $\overline{y}$ della forma

$$\overline{y} = c(x)\, e^{-A(x)}, \tag{4}$$

ove $c(x)$ è una opportuna funzione da determinare.
Imponendo che la (5) sia soluzione della (1), si ottiene che $c(x)$ deve soddisfare la seguente equazione

$$c'(x)\, e^{-A(x)} = b(x)$$

cioè

Basta, dunque, descrivere un opportuno metodo che consenta di determinare una soluzione particolare della (1). Tale metodo è noto come *metodo della variazione della costante*, dovuto a Lagrange, e consiste nel cercare una soluzione $\overline{y}$ della forma

$$\overline{y} = c(x)\, e^{-A(x)}, \tag{4}$$

ove $c(x)$ è una opportuna funzione da determinare.
Imponendo che la (5) sia soluzione della (1), si ottiene che $c(x)$ deve soddisfare la seguente equazione

$$c'(x)\, e^{-A(x)} = b(x)$$

cioè

$$c(x) = \int_{x_0}^{x} e^{A(t)} b(t)\, dt.$$

Basta, dunque, descrivere un opportuno metodo che consenta di determinare una soluzione particolare della (1). Tale metodo è noto come *metodo della variazione della costante*, dovuto a Lagrange, e consiste nel cercare una soluzione $\overline{y}$ della forma

$$\overline{y} = c\left(x\right) e^{-A(x)}, \tag{4}$$

ove $c\left(x\right)$ è una opportuna funzione da determinare.
Imponendo che la (5) sia soluzione della (1), si ottiene che $c\left(x\right)$ deve soddisfare la seguente equazione

$$c'\left(x\right) e^{-A(x)} = b\left(x\right)$$

cioè

$$c\left(x\right) = \int_{x_0}^{x} e^{A(t)} b\left(t\right) dt.$$

Cosicchè l'integrale generale della (1) è dato da

$$y\left(x\right) = e^{-A(x)} \left(c + \int_{x_0}^{x} b\left(t\right) e^{A(t)} dt\right), \; c \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Esempio

Come esempio, determiniamo l'integrale generale dell'equazione differenziale

Esempio

Come esempio, determiniamo l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y' - xy = x^3.$$

Esempio

Come esempio, determiniamo l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y' - xy = x^3.$$

Applichiamo la (5) (Per i primi esercizi, si raccomanda di seguire il metodo utilizzato per pervenire a questa formula (5), anzichè impararla a memoria!). Si ha che $a(x) = -x$, $b(x) = x^3$, dunque $A(x) = -\frac{x^2}{2}$, ed inserendo nella (5), ad esempio, $x_0 = 0$, otteniamo

Esempio

Come esempio, determiniamo l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y' - xy = x^3.$$

Applichiamo la (5) (Per i primi esercizi, si raccomanda di seguire il metodo utilizzato per pervenire a questa formula (5), anzichè impararla a memoria!). Si ha che $a(x) = -x$, $b(x) = x^3$, dunque $A(x) = -\frac{x^2}{2}$, ed inserendo nella (5), ad esempio, $x_0 = 0$, otteniamo

$$y(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \left(c + \int_0^x t^3 e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \right)$$

Esempio

Integrando per parti,

$$\begin{aligned}\int t^3 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt &= -\int t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot (-t)\,dt \\ &= -\left[t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} - 2\int t e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\right] \\ &= -t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} - 2e^{-\frac{t^2}{2}} + c\end{aligned}$$

Esempio

Integrando per parti,

$$
\begin{aligned}
\int t^3 e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt &= -\int t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot (-t)\, dt \\
&= -\left[t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} - 2 \int t e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \right] \\
&= -t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} - 2e^{-\frac{t^2}{2}} + c
\end{aligned}
$$

dunque

Esempio

Integrando per parti,

$$\begin{aligned}\int t^3 e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt &= -\int t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot (-t)\, dt \\ &= -\left[t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} - 2\int t e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \right] \\ &= -t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} - 2e^{-\frac{t^2}{2}} + c\end{aligned}$$

dunque

$$\int_0^x t^3 e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = -x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} - 2e^{-\frac{x^2}{2}} + 2$$

Esempio

Integrando per parti,

$$\begin{aligned}\int t^3 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt &= -\int t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot (-t)\,dt \\ &= -\left[t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} - 2\int t e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\right] \\ &= -t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} - 2e^{-\frac{t^2}{2}} + c\end{aligned}$$

dunque

$$\int_0^x t^3 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = -x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} - 2e^{-\frac{x^2}{2}} + 2$$

cosicchè l'integrale generale vale

Esempio

Integrando per parti,

$$\int t^3 e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = -\int t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot (-t)\, dt$$
$$= -\left[t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} - 2\int t e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt\right]$$
$$= -t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} - 2e^{-\frac{t^2}{2}} + c$$

dunque

$$\int_0^x t^3 e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = -x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} - 2e^{-\frac{x^2}{2}} + 2$$

cosicchè l'integrale generale vale

$$y(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \left(c - x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} - 2e^{-\frac{x^2}{2}} + 2\right). \tag{6}$$

Esempio

Se si vuole determinare la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $y(0) = -2$, imponendo quest'ultima nella (6), si ha

Esempio

Se si vuole determinare la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $y\left(0\right) = -2$, imponendo quest'ultima nella (6), si ha

$$-2 = y\left(0\right) = c,$$

Esempio

Se si vuole determinare la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $y(0) = -2$, imponendo quest'ultima nella (6), si ha

$$-2 = y(0) = c,$$

e la soluzione cercata è

Esempio

Se si vuole determinare la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $y(0) = -2$, imponendo quest'ultima nella (6), si ha

$$-2 = y(0) = c,$$

e la soluzione cercata è

$$y(x) = -x^2 - 2.$$

Equazioni differenziali non lineari a variabili separabili

Un'equazione differenziale del primo ordine si dice a *variabili separabili* se si presenta nella forma

$$y' = f(x) \cdot g(y), \tag{7}$$

Equazioni differenziali non lineari a variabili separabili

Un'equazione differenziale del primo ordine si dice a *variabili separabili* se si presenta nella forma

$$y' = f(x) \cdot g(y), \tag{7}$$

dove f e g sono funzioni supposte essere continue nei rispettivi insiemi di definizione. Anzitutto notiamo che per ogni $k \in \mathbb{R}$ tale che $g(k) = 0$, la funzione costantemente uguale a k è soluzione dell'equazione.

Un'equazione differenziale del primo ordine si dice a *variabili separabili* se si presenta nella forma

$$y' = f(x) \cdot g(y), \tag{7}$$

dove f e g sono funzioni supposte essere continue nei rispettivi insiemi di definizione. Anzitutto notiamo che per ogni $k \in \mathbb{R}$ tale che $g(k) = 0$, la funzione costantemente uguale a k è soluzione dell'equazione. Dunque, consideriamo le restrizioni di g ad opportuni intervalli che non contengono zeri della stessa g. L'equazione (7) può essere riscritta nella forma

Un'equazione differenziale del primo ordine si dice a *variabili separabili* se si presenta nella forma

$$y' = f(x) \cdot g(y), \tag{7}$$

dove f e g sono funzioni supposte essere continue nei rispettivi insiemi di definizione. Anzitutto notiamo che per ogni $k \in \mathbb{R}$ tale che $g(k) = 0$, la funzione costantemente uguale a k è soluzione dell'equazione. Dunque, consideriamo le restrizioni di g ad opportuni intervalli che non contengono zeri della stessa g. L'equazione (7) può essere riscritta nella forma

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\, dx.$$

Integriamo ambo i membri di quest'ultima equazione; se G denota una primitiva di $\frac{1}{g}$ ed F è una primitiva di f si ha

$$G(y) = F(x)$$

ove c rappresenta una costante arbitraria.

Integriamo ambo i membri di quest'ultima equazione; se G denota una primitiva di $\frac{1}{g}$ ed F è una primitiva di f si ha

$$G(y) = F(x)$$

ove c rappresenta una costante arbitraria. Poichè $G' = \frac{1}{g}$ e consideriamo un intervallo in cui g non si annulla, dal teorema degli zeri si ha che G' non cambia segno. Dunque G è invertibile, perciò se G^{-1} denota l'inversa di G, si ha che le funzioni

Equazioni differenziali non lineari a variabili separabili

Integriamo ambo i membri di quest'ultima equazione; se G denota una primitiva di $\frac{1}{g}$ ed F è una primitiva di f si ha

$$G(y) = F(x)$$

ove c rappresenta una costante arbitraria. Poichè $G' = \frac{1}{g}$ e consideriamo un intervallo in cui g non si annulla, dal teorema degli zeri si ha che G' non cambia segno. Dunque G è invertibile, perciò se G^{-1} denota l'inversa di G, si ha che le funzioni

$$y(x) = G^{-1}(F(x) + c)$$

Integriamo ambo i membri di quest'ultima equazione; se G denota una primitiva di $\frac{1}{g}$ ed F è una primitiva di f si ha

$$G(y) = F(x)$$

ove c rappresenta una costante arbitraria. Poichè $G' = \frac{1}{g}$ e consideriamo un intervallo in cui g non si annulla, dal teorema degli zeri si ha che G' non cambia segno. Dunque G è invertibile, perciò se G^{-1} denota l'inversa di G, si ha che le funzioni

$$y(x) = G^{-1}(F(x) + c)$$

sono soluzioni dell'equazione differenziale (7).

Esempi

- Come primo esempio, si consideri l'equazione differenziale, detta *equazione logistica*, che descrive la crescita nel tempo di una fissato numero di individui di una popolazione (si veda la prima parte), che è della forma

$$y' = ay(1 - by),$$

con $a, b \in \mathbb{R}$.

Esempi

- Come primo esempio, si consideri l'equazione differenziale, detta *equazione logistica*, che descrive la crescita nel tempo di una fissato numero di individui di una popolazione (si veda la prima parte), che è della forma

$$y' = ay(1 - by),$$

con $a, b \in \mathbb{R}$.Separando le variabili, otteniamo

Esempi

- Come primo esempio, si consideri l'equazione differenziale, detta *equazione logistica*, che descrive la crescita nel tempo di una fissato numero di individui di una popolazione (si veda la prima parte), che è della forma

$$y' = ay(1 - by),$$

con $a, b \in \mathbb{R}$.Separando le variabili, otteniamo

$$\frac{dy}{y(1 - by)} = adx.$$

Esempi

- Come primo esempio, si consideri l'equazione differenziale, detta *equazione logistica*, che descrive la crescita nel tempo di una fissato numero di individui di una popolazione (si veda la prima parte), che è della forma

$$y' = ay(1 - by),$$

con $a, b \in \mathbb{R}$.Separando le variabili, otteniamo

$$\frac{dy}{y(1 - by)} = adx.$$

Adesso ricordiamo che

Esempi

- Come primo esempio, si consideri l'equazione differenziale, detta *equazione logistica*, che descrive la crescita nel tempo di una fissato numero di individui di una popolazione (si veda la prima parte), che è della forma

$$y' = ay(1 - by),$$

con $a, b \in \mathbb{R}$.Separando le variabili, otteniamo

$$\frac{dy}{y(1 - by)} = adx.$$

Adesso ricordiamo che

$$\int \frac{dy}{y(1 - by)} = \int \frac{dy}{y} + \int \frac{b\,dy}{1 - by} = \log \left| \frac{y}{1 - by} \right|.$$

Esempi

Allora si ottiene

Esempi

Allora si ottiene

$$\log \left| \frac{y}{1 - by} \right| = ax + c$$

Esempi

Allora si ottiene

$$\log\left|\frac{y}{1-by}\right| = ax + c$$

da cui

Esempi

Allora si ottiene

$$\log\left|\frac{y}{1-by}\right| = ax + c$$

da cui

$$\left|\frac{y}{1-by}\right| = e^{c}\cdot e^{ax},$$

Esempi

Allora si ottiene

$$\log\left|\frac{y}{1-by}\right| = ax + c$$

da cui

$$\left|\frac{y}{1-by}\right| = e^c \cdot e^{ax},$$

cosicchè

Esempi

Allora si ottiene

$$\log\left|\frac{y}{1-by}\right| = ax + c$$

da cui

$$\left|\frac{y}{1-by}\right| = e^c \cdot e^{ax},$$

cosicchè

$$\frac{y}{1-by} = \pm e^c \cdot e^{ax}.$$

Adesso, posto $k = \pm e^c$, troviamo

Esempi

Allora si ottiene

$$\log\left|\frac{y}{1-by}\right| = ax + c$$

da cui

$$\left|\frac{y}{1-by}\right| = e^c \cdot e^{ax},$$

cosicchè

$$\frac{y}{1-by} = \pm e^c \cdot e^{ax}.$$

Adesso, posto $k = \pm e^c$, troviamo

$$y = k\,(1-by)\,e^{ax} = ke^{ax} - kbye^{ax}$$

Esempi

Da quest'ultima, ricavando la y,si ha

$$y = \frac{ke^{ax}}{(1 + kbe^{ax})}$$

Esempi

Da quest'ultima, ricavando la y,si ha

$$y = \frac{ke^{ax}}{(1 + kbe^{ax})}$$

al variare di k in $\mathbb{R}$.

Esempi

Da quest'ultima, ricavando la y,si ha

$$y = \frac{ke^{ax}}{(1 + kbe^{ax})}$$

al variare di k in $\mathbb{R}$.Si noti che a quest'ultima classe di soluzioni va aggiunta quella che si ottiene ponendo $1 - by = 0$, cioè la funzione che vale costantemente $\frac{1}{b}$.

- Un altro esempio di equazione a variabili separabili è costituito dalla

Esempi

Da quest'ultima, ricavando la y,si ha

$$y = \frac{ke^{ax}}{(1 + kbe^{ax})}$$

al variare di k in $\mathbb{R}$.Si noti che a quest'ultima classe di soluzioni va aggiunta quella che si ottiene ponendo $1 - by = 0$, cioè la funzione che vale costantemente $\frac{1}{b}$.

- Un altro esempio di equazione a variabili separabili è costituito dalla

$$y' = y^2.$$

  Imponendo la condizione $y \neq 0$ e separando le variabili, si ha

Esempi

Da quest'ultima, ricavando la y,si ha

$$y = \frac{ke^{ax}}{(1 + kbe^{ax})}$$

al variare di k in $\mathbb{R}$.Si noti che a quest'ultima classe di soluzioni va aggiunta quella che si ottiene ponendo $1 - by = 0$, cioè la funzione che vale costantemente $\frac{1}{b}$.

- Un altro esempio di equazione a variabili separabili è costituito dalla
$$y' = y^2.$$
Imponendo la condizione $y \neq 0$ e separando le variabili, si ha
$$\frac{dy}{y^2} = dx,$$

Esempi

Allora integrando otteniamo

Esempi

Allora integrando otteniamo

$$-\frac{1}{y} = x + c.$$

Ma allora l'integrale generale dell'equazione è

Esempi

Allora integrando otteniamo

$$-\frac{1}{y} = x + c.$$

Ma allora l'integrale generale dell'equazione è

$$y = \frac{1}{c - x}$$

Esempi

Allora integrando otteniamo

$$-\frac{1}{y} = x + c.$$

Ma allora l'integrale generale dell'equazione è

$$y = \frac{1}{c - x}$$

con $c \in \mathbb{R}$. Si noti che a questa classe di soluzioni va aggiunta la funzione identicamente nulla $y = 0$, che ovviamente verifica l'equazione assegnata.

Qualche esercizio

Determinare l'integrale generale di ciascuna delle seguenti equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili:

Qualche esercizio

Determinare l'integrale generale di ciascuna delle seguenti equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili:

- $y' = \dfrac{ye^{2x}}{1 + e^{2x}}$;

Qualche esercizio

Determinare l'integrale generale di ciascuna delle seguenti equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili:

- $y' = \dfrac{ye^{2x}}{1+e^{2x}}$;
- $y' = e^{-y}(1+x)$;

Qualche esercizio

Qualche esercizio

Determinare l'integrale generale di ciascuna delle seguenti equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili:

- $y' = \dfrac{ye^{2x}}{1+e^{2x}}$;
- $y' = e^{-y}\,(1+x)$;
- $y' = x^2 - 3x + 2$;

Qualche esercizio

Determinare l'integrale generale di ciascuna delle seguenti equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili:

- $y' = \dfrac{ye^{2x}}{1+e^{2x}}$;
- $y' = e^{-y}(1+x)$;
- $y' = x^2 - 3x + 2$;
- $(x-3)^2 y' = x(y-1)$ con $x \neq 3$;

Qualche esercizio

Determinare l'integrale generale di ciascuna delle seguenti equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili:

- $y' = \dfrac{ye^{2x}}{1+e^{2x}}$;
- $y' = e^{-y}(1+x)$;
- $y' = x^2 - 3x + 2$;
- $(x-3)^2 y' = x(y-1)$ con $x \neq 3$;
- $y' = y^2 - 3y + 2$;

Qualche esercizio

Determinare l'integrale generale di ciascuna delle seguenti equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili:

- $y' = \dfrac{ye^{2x}}{1+e^{2x}}$;
- $y' = e^{-y}(1+x)$;
- $y' = x^2 - 3x + 2$;
- $(x-3)^2 y' = x(y-1)$ con $x \neq 3$;
- $y' = y^2 - 3y + 2$;
- $y' - xy = 0$;

Qualche esercizio

Determinare l'integrale generale di ciascuna delle seguenti equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili:

- $y' = \dfrac{ye^{2x}}{1+e^{2x}}$;
- $y' = e^{-y}(1+x)$;
- $y' = x^2 - 3x + 2$;
- $(x-3)^2 y' = x(y-1)$ con $x \neq 3$;
- $y' = y^2 - 3y + 2$;
- $y' - xy = 0$;
- $\sqrt{1+x^2}\,y' = \sqrt{1-y^2}$.

Qualche esercizio

Determinare l'integrale generale di ciascuna delle seguenti equazioni differenziali lineari del primo ordine:

Qualche esercizio

Determinare l'integrale generale di ciascuna delle seguenti equazioni differenziali lineari del primo ordine:

- $y' + \dfrac{2x}{1-x^2}y + 3 = 0, \quad x \neq \pm 1;$

Qualche esercizio

Determinare l'integrale generale di ciascuna delle seguenti equazioni differenziali lineari del primo ordine:

- $y' + \dfrac{2x}{1-x^2}y + 3 = 0, \quad x \neq \pm 1;$
- $y' + \dfrac{2}{x}y - x^3 = 0;$

Qualche esercizio

Determinare l'integrale generale di ciascuna delle seguenti equazioni differenziali lineari del primo ordine:

- $y' + \dfrac{2x}{1-x^2}y + 3 = 0, \quad x \neq \pm 1;$
- $y' + \dfrac{2}{x}y - x^3 = 0;$
- $y' + \dfrac{1}{x}y = e^{x^2};$

Qualche esercizio

Determinare l'integrale generale di ciascuna delle seguenti equazioni differenziali lineari del primo ordine:

- $y' + \dfrac{2x}{1-x^2}y + 3 = 0, \quad x \neq \pm 1;$
- $y' + \dfrac{2}{x}y - x^3 = 0;$
- $y' + \dfrac{1}{x}y = e^{x^2};$
- $y' + y\cos x = \operatorname{sen} x \cos x;$

Qualche esercizio

Qualche esercizio

Determinare l'integrale generale di ciascuna delle seguenti equazioni differenziali lineari del primo ordine:

- $y' + \dfrac{2x}{1-x^2}y + 3 = 0, \quad x \neq \pm 1;$
- $y' + \dfrac{2}{x}y - x^3 = 0;$
- $y' + \dfrac{1}{x}y = e^{x^2};$
- $y' + y \cos x = \operatorname{sen} x \cos x;$
- $y' + y \operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos x}.$

Qualche esercizio

Per ciascuna delle seguenti equazioni differenziali, determinare l'integrale che soddisfa la condizione indicata

Qualche esercizio

Per ciascuna delle seguenti equazioni differenziali, determinare l'integrale che soddisfa la condizione indicata

Qualche esercizio

Per ciascuna delle seguenti equazioni differenziali, determinare l'integrale che soddisfa la condizione indicata

- $y' = \text{sen}\,(1-x)\,;\ y\left(1-\frac{\pi}{2}\right) = 0;$

Qualche esercizio

Per ciascuna delle seguenti equazioni differenziali, determinare l'integrale che soddisfa la condizione indicata

- $y' = \text{sen}\,(1-x)\,;\ y\left(1-\frac{\pi}{2}\right) = 0;$
- $y' + \dfrac{y+1}{x^2} = 0;\ y\,(1) = 0;$

Qualche esercizio

Per ciascuna delle seguenti equazioni differenziali, determinare l'integrale che soddisfa la condizione indicata

- $y' = \operatorname{sen}(1-x)$; $y\left(1-\frac{\pi}{2}\right) = 0$;
- $y' + \dfrac{y+1}{x^2} = 0$; $y(1) = 0$;
- $y' = xy^2$; $y(0) = 1$;

Qualche esercizio

Per ciascuna delle seguenti equazioni differenziali, determinare l'integrale che soddisfa la condizione indicata

- $y' = \operatorname{sen}\,(1 - x)\,;\; y\left(1 - \frac{\pi}{2}\right) = 0;$
- $y' + \dfrac{y + 1}{x^2} = 0;\; y\,(1) = 0;$
- $y' = xy^2;\;\; y\,(0) = 1;$
- $y' + xy = x;\;\; y\,(1) = 4;$

Qualche esercizio

Qualche esercizio

Per ciascuna delle seguenti equazioni differenziali, determinare l'integrale che soddisfa la condizione indicata

- $y' = \operatorname{sen}(1-x)\,;\; y\left(1-\frac{\pi}{2}\right) = 0;$
- $y' + \dfrac{y+1}{x^2} = 0;\; y(1) = 0;$
- $y' = xy^2;\;\; y(0) = 1;$
- $y' + xy = x;\;\; y(1) = 4;$
- $y' - \dfrac{1}{x}y = x \operatorname{tg} x;\;\; y(1) = 0;$

Qualche esercizio

Per ciascuna delle seguenti equazioni differenziali, determinare l'integrale che soddisfa la condizione indicata

- $y' = \operatorname{sen}\,(1-x)\,;\; y\left(1-\frac{\pi}{2}\right) = 0;$
- $y' + \dfrac{y+1}{x^2} = 0;\; y\,(1) = 0;$
- $y' = xy^2;\;\; y\,(0) = 1;$
- $y' + xy = x;\;\; y\,(1) = 4;$
- $y' - \dfrac{1}{x}y = x\,\operatorname{tg}x;\;\; y\,(1) = 0;$
- $y' + 3x^2y = 1;\;\; y\,(0) = 1.$