1. Derivate Parziali

LEZIONE: Derivate parziali. Differenziabilità

Derivata rispetto a x

Sia A un aperto di $\mathbb{R}^2$, sia $f : A \to \mathbb{R}$ ed infine sia (x, y) un punto fissato di A.

Definizione

La derivata parziale rispetto a x della funzione f nel punto (x, y) è il limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h},$$

purché tale limite esista e sia finito.

Per indicare tale derivata si usano equivalentemente i seguenti simboli

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \quad f_x(x, y), \quad D_x f(x, y)$$

Derivata rispetto a y

La derivata di f rispetto a y nel punto (x, y) si definisce e si indica in modo analogo

Definizione

La derivata parziale rispetto a y della funzione f nel punto (x, y) è il limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h},$$

purché tale limite esista e sia finito.

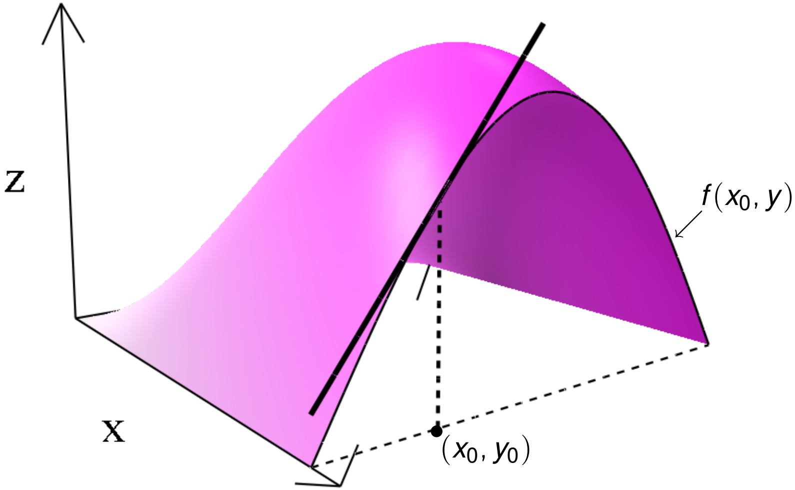
Per indicare tale derivata si usano equivalentemente i seguenti simboli

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y), \quad f_y(x, y), \quad D_y f(x, y)$$

Significato geometrico della derivata parziale

Osservazione

Sia $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e sia $(x_0, y_0) \in A$, allora $f_y(x_0, y_0)$ rappresenta il coefficiente angolare della retta (che giace nel piano $x = x_0$) tangente al grafico della funzione $f(x_0, y)$, analogamente $f_x(x_0, y_0)$ rappresenta il coefficiente angolare della retta (che giace nel piano $y = y_0$) tangente al grafico della funzione $f(x, y_0)$.


Z
X
$f(x_0, y)$
(x_0, y_0)

Calcolo delle derivate parziali

Osservazione

In base alla definizione le derivate parziali rispetto a x o a y si calcolano considerando l'altra variabile (rispettivamente y o x) fissata, quindi è sufficiente adoperare le regole di derivazione per le funzioni di una sola variabile.

Esempi.

- $f(x,y) = x^2y^3 \Rightarrow$
  $f_x(x,y) = 2xy^3$, $f_y(x,y) = 3x^2y^2$
- $f(x,y) = \operatorname{sen} x \operatorname{arctg} y + x^2 - y^3 \Rightarrow$
  $$f_x(x,y) = \cos x \operatorname{arctg} y + 2x, \quad f_y(x,y) = \frac{\operatorname{sen} x}{1+y^2} - 3y^2$$
- $f(x,y) = xe^x\sqrt{y} \Rightarrow$
  $$f_x(x,y) = (e^x + xe^x)\sqrt{y}, \quad f_y(x,y) = xe^x\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

Funzioni derivabili, gradiente

Sia A un aperto di $\mathbb{R}^2$ ed $f : A \to \mathbb{R}$.

Definizione

La funzione f si dice derivabile in A se ammette entrambe le derivate parziali in tutti i punti di A.

Definizione

Sia f una funzione derivabile in A, il gradiente di f calcolato nel punto (x, y) di A è il vettore che ha come componenti le derivate parziali di f, cioè

$$Df(x, y) = \nabla f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y))$$

Esempi

- $f(x,y) = log(1+xy) \Rightarrow Df(x,y) = \left(\frac{y}{1+xy}, \frac{x}{1+xy}\right)$,
- $f(x,y) = e^{(x^2+y^2)/2} \Rightarrow Df(x,y) = \left(xe^{(x^2+y^2)/2}, ye^{(x^2+y^2)/2}\right)$
- $f(x,y) = \mathrm{sen}(x^2) \Rightarrow Df(x,y) = (2x\cos(x^2), 0)$

Derivate successive e matrice Hessiana

Sia A un aperto di $\mathbb{R}^2$, $f : A \to \mathbb{R}$ ed (x, y) un punto di A

Definizione

La funzione f di dice derivabile 2 volte in (x, y) se è ivi derivabile assieme alle funzioni f_x e f_y. In tal caso si pone

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} f_x(x, y) &= f_{xx}(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y} f_x(x, y) = f_{xy}(x, y) \\
\frac{\partial}{\partial x} f_y(x, y) &= f_{yx}(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y} f_y(x, y) = f_{yy}(x, y)
\end{aligned}$$

La seguente matrice

$$D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix}$$

è detta matrice Hessiana di f.

Esempi

- $f(x,y) = x^2 y \Rightarrow D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 0 \end{pmatrix}$
- $f(x,y) = \log(x^2 + y) \Rightarrow D^2 f = \begin{pmatrix} \frac{-2x^2+2y}{(x^2+y)^2} & \frac{-2x}{(x^2+y)^2} \\ \frac{-2x}{(x^2+y)^2} & \frac{-1}{(x^2+y)^2} \end{pmatrix}$
- $f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow D^2 f = \begin{pmatrix} \frac{2xy}{(y^2+x^2)^2} & \frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2} \\ \frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2} & \frac{-2xy}{(y^2+x^2)^2} \end{pmatrix}$

Teorema di Schwarz

Si osservi che negli esempi precedenti risulta $f_{xy} = f_{yx}$. Vale infatti il seguente

Teorema (Schwarz)

Sia A un aperto di $\mathbb{R}^2$, (x_0, y_0) *un punto di A e* $f(x, y)$ *una funzione derivabile due volte in A. Se le derivare seconde miste* $f_{xy}(x, y)$ *e* $f_{yx}(x, y)$ *sono continue nel punto* (x_0, y_0), *allora risulta*

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

2. Differenziabilità

LEZIONE: Derivate parziali. Differenziabilità

Definizione

Sia A un aperto di $\mathbb{R}^2$, $f : A \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in A$ ed $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$.

Definizione

La funzione f si dice differenziabile in (x_0, y_0) se è ivi derivabile ed inoltre

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - [f(x_0, y_0) + \langle Df(x_0, y_0), h\rangle]}{|h|} = 0$$

Osservazione

Si osservi che la funzione f è differenziabile in (x_0, y_0), se

$$f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - [f(x_0, y_0) + \langle Df(x_0, y_0), h\rangle] = o(|h|)$$

o equivalentemente, se

$$\begin{aligned} f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) &= f(x_0, y_0) + \langle Df(x_0, y_0), h\rangle + o(|h|) \\ &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)h_1 + f_y(x_0, y_0)h_2 + o(|h|) \end{aligned}$$

Se poniamo $h_1 = x - x_0$, $h_2 = y - y_0$ si ottiene

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

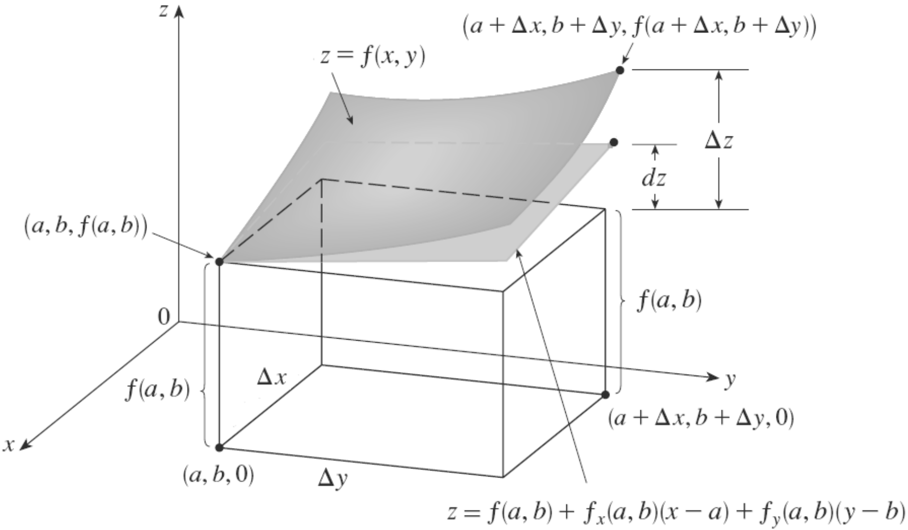
$$+o\left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)}\right)$$

Differenziabilità: significato geometrico

Si osservi che

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \qquad (1)$$

è l'equazione del piano passante per (x_0, y_0) ortogonale al vettore $Df(x_0, y_0)$.
Dunque la funzione è differenziabile in (x_0, y_0), se il piano definito nella (**??**) differisce dalla funzione data per una quantità che tende a zero più rapidamente del modulo dell'incremento.
Se la funzione è differenziabile, il piano (**??**) viene, quindi, detto piano tangente al grafico di f nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ e il vettore $Df(x_0, y_0)$ viene chiamato vettore normale al grafico di f in (x_0, y_0).



z
$(a+\Delta x, b+\Delta y, f(a+\Delta x, b+\Delta y))$
$z = f(x, y)$
Δz
dz
$(a, b, f(a, b))$
$f(a, b)$
0
Δx
y
$f(a, b)$
x
$(a+\Delta x, b+\Delta y, 0)$
$(a, b, 0)$
Δy
$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x-a) + f_y(a, b)(y-b)$

Differenziabilità e continuità

Una funzione di due variabili parzialmente derivabile non è detto sia continua, a differenza di quanto accade per le funzioni di una variabile dove la derivabilità della funzione garantisce la continuità. Nel caso di funzioni di due variabili la continuità è garantita dalla differenziabilità.

Teorema

Se f è differenziabile in (x_0, y_0) allora f continua in (x_0, y_0)

Il viceversa non vale.
Infatti non tutte le funzioni continue sono differenziabili. La funzione modulo ad esempio

$$f(x, y) = |(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

è continua nell'origine ma non è ivi differenziabile (in effetti non è nemmeno derivabile nell'origine).

Una condizione sufficiente per la differenziabilità

Per verificare la differenziabilità di una funzione è utile il seguente risultato.

Teorema (Teorema del differenziale)

Sia A un aperto di $\mathbb{R}^2$. Se f è derivabile ed f_x, f_y sono continue in A allora f è differenziabile in A.

Se poniamo

Definizione

$C^1(A) = \{f : A \to \mathbb{R} : f \text{ è derivabile in } A \text{ ed } f_x \text{ e } f_y \text{ sono continue in } A\}$

allora il teorema del differenziale può essere così schematizzato:

$$f \in C^1(A) \Rightarrow f \text{ differenziabile in } A$$

Esempio

Data la funzione $f(x, y) = x^3y^2$, verificata la differenziabilità, determinare l'equazione del piano tangente nel punto di coordinate $(1, 2)$.

Le derivate parziali
$f_x = 3x^2y^2$, $f_y = 2x^3y$
sono continue e dunque la funzione è differenziabile.
Per scrivere l'equazione del piano tangente si calcolano la funzione e le derivate parziali nel punto assegnato:
$f(1, 2) = 4,\ f_x(1, 2) = 12,\ f_y(1, 2) = 4$
Dunque dall'equazione (**??**) si ottiene l'equazione del piano tangente nel punto di coordinate $(1, 2)$:
$z = 4 + 12(x - 1) + 4(y - 2) \iff z = 12x + 4y - 16$