1. Definizioni

LEZIONE: ESTREMI RELATIVI E ASSOLUTI

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ed $f : A \to \mathbb{R}$.

Definizione

Il punto $(x_0, y_0) \in A$ si dice di $\begin{array}{c}\text{minimo}\\ \text{(massimo)}\end{array}$ relativo per la funzione f nell'insieme A se

$$\exists I_\delta(x_0, y_0) : f(x_0, y_0) \begin{array}{c}\leq\\ (\geq)\end{array} f(x, y) \quad \forall (x, y) \in A \cap I_\delta(x_0, y_0).$$

Estremi assoluti

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ed $f : A \to \mathbb{R}$.

Definizione

Il punto $(x_0, y_0) \in A$ si dice di $\begin{array}{c}\text{minimo}\\ (\text{massimo})\end{array}$ assoluto per la funzione f nell'insieme A se

$$f(x_0, y_0) \begin{array}{c}\leq\\ (\geq)\end{array} f(x, y) \quad \forall (x, y) \in A.$$

Punti critici

Sia A un aperto di $\mathbb{R}^2$ ed $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile.

Definizione

Il punto $(x_0, y_0) \in A$ si dice punto critico per f se

$$Df(x_0, y_0) = (0, 0) \Leftrightarrow f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$$

2. Condizioni necessarie e sufficienti

LEZIONE: ESTREMI RELATIVI E ASSOLUTI

Punti critici e condizione necessaria del primo ordine

Per le funzioni di due variabili vale un risultato analogo al teorema di Fermat per funzioni di una variabile:

Teorema (Condizione necessaria del primo ordine)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$, (x_0, y_0) *interno per* A, $f : A \to \mathbb{R}$ *derivabile in* A. *Se* (x_0, y_0) *è un punto di minimo o di massimo relativo per* f *allora* (x_0, y_0) *è un punto critico, cioè* $Df(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Punti sella

Osservazione

La condizione precedente è solo necessaria. Esistono cioè punti critici che non sono ne' di massimo ne' di minimo, tali punti vengono detti punti di sella

Ad esempio per la funzione $f(x, y) = x^4 - y^2$, $(0, 0)$ è un punto critico. Ma $(0, 0)$ non è un estremo relativo per f. Infatti $f(x, 0) = x^4$ e $f(0, y) = -y^2$ ovvero lungo l'asse x ha un minimo nell'origine, mentre ristretta all'asse y un massimo.

Matrice hessiana

Sia

$C^2(A) = \{f$ derivabile due volte in A con derivate seconde continue$\}$

Definizione

Sia $f \in C^2(A)$ allora la matrice hessiana di f (che si indica con D^2f) è la matrice 2×2 simmetrica così definita

$$D^2f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

e il determinante hessiano, che si indica con $Hf(x,y)$, è il determinante di D^2f, ovvero

$$\begin{aligned} Hf(x,y) &= f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}(x,y)f_{yx}(x,y) \\ &= f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f^2_{xy}(x,y). \end{aligned}$$

Condizione necessaria del secondo ordine

Teorema (Condizione necessaria del secondo ordine)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in A$, $f : A \to \mathbb{R}$ *di classe* C^2.

Se (x_0, y_0) *è un punto di* $\begin{array}{c} \textit{minimo} \\ \textit{(massimo)} \end{array}$ *relativo per* f *in* A *allora:*

$$Df(x_0, y_0) = (0, 0) \tag{i}$$

$$f_{xx}(x_0, y_0) \begin{array}{c} \geq \\ (\leq) \end{array} 0, \; f_{yy}(x_0, y_0) \begin{array}{c} \geq \\ (\leq) \end{array} 0, \tag{ii}$$

$$Hf(x_0, y_0) > 0. \tag{iii}$$

Condizioni Sufficienti

Per determinare gli estremi relativi si utilizza il seguente risultato

Teorema (Condizione Sufficiente del secondo ordine)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$, (x_0, y_0) *interno per* A, $f : A \to \mathbb{R}$ *di classe* C^2. *Se*

$$Df(x_0, y_0) = (0, 0) \tag{j}$$

$$f_{xx}(x_0, y_0) \underset{(<)}{>} 0, \; f_{yy}(x_0, y_0) \underset{(<)}{>} 0, \tag{jj}$$

$$Hf(x_0, y_0) > 0, \tag{jjj}$$

allora (x_0, y_0) *è di* $\underset{(\mathit{massimo})}{\mathit{minimo}}$ *relativo per* f *in* A.

Se, invece delle $j - jjj$, *accade che* $Df(x_0, y_0) = (0, 0)$ *e* $Hf(x_0, y_0) < 0$, *allora* (x_0, y_0) *è un punto di sella.*

Ricerca degli estremi assoluti

Sia $f : K \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua e K un insieme compatto (ovvero chiuso e limitato). Per il Teorema di Weierstrass la funzione ammette minimo e massimo in K. I casi possibili sono i seguenti.

a) Gli estremi assoluti vengono assunti su dei punti interni a K, in cui la funzione risulta derivabile, che risulteranno, quindi, essere punti critici.
b) Gli estremi assoluti vengono assunti su dei punti interni a K, in cui la funzione risulta non derivabile.
c) Gli estremi assoluti vengono assunti sulla frontiera di K.

Ricerca degli estremi assoluti

Bisogna quindi

1) determinare i punti critici di f, interni a K
2) determinare i punti interni a K in cui f non è derivabile,
3) determinare i punti di massimo e minimo assoluti di f ristretta a ∂K (si scrive ∂K come una curva $\gamma(t)$ e si studia la funzione di una variabile $f(\gamma(t))$).

Infine si calcola il valore della funzione nei punti determinati nei passi 1)-3). Il valore più grande ed il più piccolo tra quelli ottenuti, sono rispettivamente il massimo ed il minimo di f in K.

3. Esempi

LEZIONE: ESTREMI RELATIVI E ASSOLUTI

Esempio 1

(i) Determinare e classificare i punti critici della funzione $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$.
(ii) Determinarne, inoltre, gli estremi assoluti nell'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Risoluzione (i).

$Df = (2x - y, -x + 2y) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases}$

Il punto $(0, 0)$ è, quindi, l'unico punto critico per f.
Risulta $f_{xx}(0, 0) = f_{yy}(0, 0) = 2$ e

$$Hf(0, 0) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3.$$

Quindi $(0, 0)$ è un punto di minimo relativo per f.

Risoluzione (ii).
La frontiera di D è la circonferenza di centro l'origine e raggio 1, che ha equazioni parametriche $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, con $t \in [0, 2\pi]$. Quindi per studiare la funzione su ∂D, ponendo $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, ottengo la funzione di una variabile $g(t) = 1 - \cos t \operatorname{sen} t$ della quale devo determinare il massimo ed il minimo. Si ottiene:

$$\min_{x \in \partial D} f = \min_{[0,2\pi]} g(t) = \mathbf{\frac{1}{2}} \quad \text{raggiunto per } t = \pi/4 \ \text{ e } t = 5\pi/4,$$

$$\max_{x \in \partial D} f = \max_{[0,2\pi]} g(t) = \mathbf{\frac{3}{2}} \quad \text{raggiunto per } t = 3\pi/4 \ \text{ e } t = 7\pi/4$$

Il punto $(0, 0)$ è l'unico punto critico per f e tale punto è interno a D ed è $f(0, 0) = \mathbf{0}$.
Confrontando i 3 valori trovati, si ottiene che

$$\min_D f(x, y) = 0 \qquad \max_D f(x, y) = \frac{3}{2}$$

Esempio 2

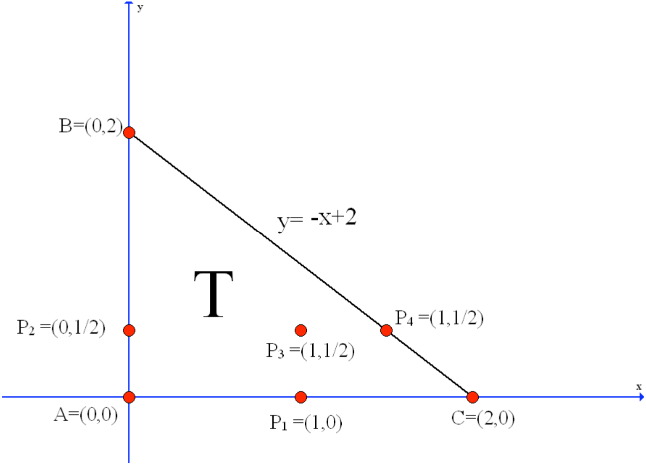
(i) Determinare e classificare i punti critici della funzione $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - y$
(ii) Determinarne, inoltre, gli estremi assoluti nel triangolo $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2 \text{ e } 0 \le y \le -x + 2\}$.
Risoluzione (i).

$$Df = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (1, 1/2)$$

$$Hf(1, 1/2) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

Quindi nel punto $(1, 1/2)$ la funzione presenta un minimo relativo.

Risoluzione (ii).
Studiamo la funzione sulla frontiera che è costituita dall'unione di tre segmenti: $\partial T = \overline{AC} \cup \overline{BC} \cup \overline{AB}$, (vedi figura).



Sul segmento $\overline{AC}$ di equazione $y = 0$, $x \in [0,2]$:

$$\max_{x\in[0,2]} f(x,0) = \max_{x\in[0,2]} \left(x^2 - 2x\right) = f(0,0) = f(2,0) = 0$$

$$\min_{x\in[0,2]} f(x,0) = \min_{x\in[0,2]} \left(x^2 - 2x\right) = f(1,0) = -1$$

Segmento $\overline{BC}$ di equazione $y = -x + 2$, $x \in [0,2]$:

$$\max_{x\in[0,2]} f(x,-x+2) = \max_{x\in[0,2]} \left(2x^2 - 5x + 2\right) = f(0,2) = 2$$

$$\min_{x\in[0,2]} f(x,-x+2) = \min_{x\in[0,2]} \left(2x^2 - 5x + 2\right) = f\left(\frac{5}{4},\frac{3}{4}\right) = -\frac{9}{8}.$$

Segmento $\overline{AB}$ di equazione $x = 0$, $y \in [0,2]$:

$$\max_{y\in[0,2]} f(0,y) = \max_{y\in[0,2]} \left(y^2 - y\right) = f(0,2) = 2$$

$$\min_{y\in[0,2]} f(0,y) = \min_{y\in[0,2]} \left(y^2 - y\right) = f(0,1/2) = -1/4.$$

Inoltre nel punto critico $(1, 1/2)$ interno a T la funzione vale $f(1, 1/2) = -5/4$,
In conclusione, confrontando i valori trovati (cioè $0,\ -1,\ 2,\ -\dfrac{9}{8},\ -1/4,\ -5/4$), si ottiene che

$$\max_{x \in T} f = 2 \text{ raggiunto per } (x, y) = (0, 2) \in \partial T$$

$$\min_{x \in T} f = -5/4 \text{ raggiunto per } (x, y) = (1, 1/2) \in \overset{\circ}{T}.$$

Grafico di f in T.