1. Cenni sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$

LEZIONE: SPAZIO VETTORIALE $\mathbb{R}^2$ ED ELEMENTI DI TOPOLOGIA

Somma tra due vettori e moltiplicazione per uno scalare

Il simbolo $\mathbb{R}^2$ indica l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali, ovvero

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}.$$

In $\mathbb{R}^2$ sono definite le seguenti operazioni:

1) *Somma*

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

2) *Prodotto per uno scalare*

$$\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$$

Osservazioni

Osservazione

Munito di tali operazioni $\mathbb{R}^2$ è uno spazio vettoriale, dove il vettore nullo è chiaramente $(0,0)$ mentre l'opposto del vettore $u = (x, y)$ è il vettore $-u = (-x, -y)$.

Osservazione

Su $\mathbb{R}^2$ non è possibile stabilire una relazione d'ordine.

Prodotto scalare e norma

Definizione

Il prodotto scalare di due vettori $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ è così definito

$$\langle u, v \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

Definizione

Il modulo o norma di un vettore $u = (x, y)$ è definito come segue

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Angolo tra due vettori

Definizione

Si chiama angolo tra due vettori non nulli u e v di $\mathbb{R}^2$ quel numero $\theta \in [0, \pi]$:

$$\cos(\theta) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|\,\|v\|}.$$

Osservazione

Due vettori u e v sono ortogonali se e soltanto se $\langle u, v \rangle = 0$.

Disuguaglianza triangolare e disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

Proposizione (Disuguaglianza triangolare)

Siano u e v due vettori di $\mathbb{R}^2$, allora

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

Teorema (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz)

Siano u e v due vettori di $\mathbb{R}^2$, allora

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \, \|v\| \, .$$

Inoltre l'uguaglianza sussiste se e soltanto se i due vettori sono proporzionali, oppure, ovviamente, se uno dei due vettori è nullo.

2. Elementi di topologia di $\mathbb{R}^2$

LEZIONE: SPAZIO VETTORIALE $\mathbb{R}^2$ ED ELEMENTI DI TOPOLOGIA

Nozione di intorno

Definizione

Sia (x_0, y_0) un punto di $\mathbb{R}^2$, si chiama intorno circolare di (x_0, y_0) di raggio δ, l'insieme

$$I_\delta(x_0, y_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\}$$

In altre parole un punto è in $I_\delta(x_0, y_0)$ se e soltanto se giace all'interno della circonferenza di centro in (x_0, y_0) e raggio δ.

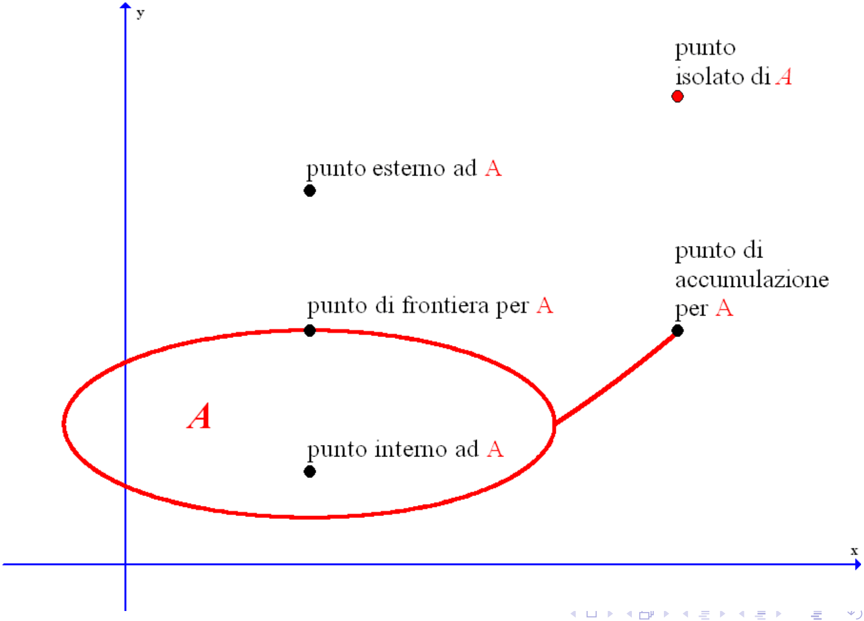
Punti interni, esterni, di frontiera, di accumulazione e isolati

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e denotiamo con CA il suo complementare, e sia z_0 un punto di $\mathbb{R}^2$.

Definizione

Il punto z_0 si dice

- interno ad A, se $\exists \delta > 0 : I_\delta(z_0) \subset A$,
- esterno ad A se è interno a CA,
- di frontiera per A se non è ne' interno ne' esterno per A,
- di accumulazione per A se $\forall \delta > 0$ $I_\delta(z_0) \cap [A \setminus z_0] \neq \emptyset$,
- punto isolato di A se $z_0 \in A$ ma z_0 non è di accumulazione per A.


y
x
punto
isolato di A
punto esterno ad A
punto di
accumulazione
per A
punto di frontiera per A
A
punto interno ad A

Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$.

Definizione

A si dice

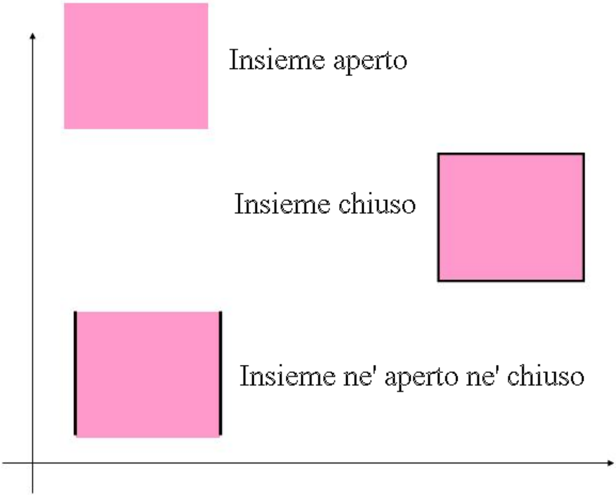
- aperto se ogni punto di A è interno ad A,
- chiuso se CA è aperto.

Osservazione

Gli unici insiemi che risultano contemporaneamente aperti e chiusi sono l'insieme vuoto e $\mathbb{R}^2$.

Ci sono insiemi che non sono ne' aperti ne' chiusi ad esempio

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \quad \text{e} \quad 0 < y < 1\}$$


Insieme aperto
Insieme chiuso
Insieme ne' aperto ne' chiuso

Chiusura di un insieme

Sia $A \subset \mathbb{R}^2$

Definizione

La chiusura di A è l'insieme, denotato con $\overline{A}$, ottenuto dall'unione dell'insieme A e dei suoi punti di accumulazione. Tale insieme risulta chiuso.

Definizione

L'insieme dei punti di frontiera di A si denota con ∂A.

Osservazione

$$\overline{A} = A \cup \partial A$$

Osservazione

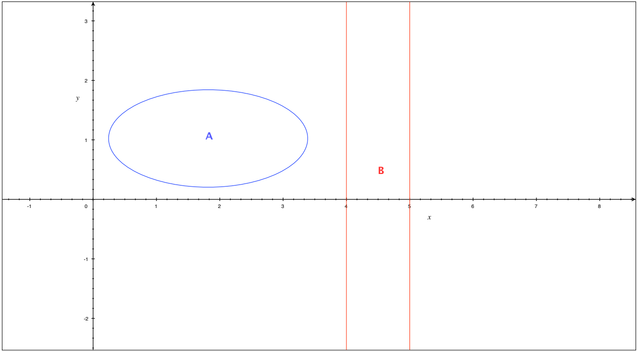
$$A \text{ è chiuso} \quad \Leftrightarrow \quad A = \overline{A}$$

Insiemi limitati

Sia $A \subset \mathbb{R}^2$

Definizione

A si dice limitato se $\exists M > 0 : A \subset I_M(0,0)$



Insiemi compatti, connessi, domini

Sia $A \subset \mathbb{R}^2$

Definizione

A si dice compatto se A è chiuso e limitato.

Definizione

Un aperto A di dice connesso se e soltanto se non esistono due aperti disgiunti non vuoti di $\mathbb{R}^2$, A_1 e A_2 tali che $A = A_1 \cup A_2$.

Definizione

Un dominio di $\mathbb{R}^2$ è la chiusura di un aperto, infine un dominio si dice connesso se è la chiusura di un aperto connesso.