1. Funzioni reali di due variabili reali

LEZIONE: FUNZIONI DI DUE VARIABILI. LIMITI E CONTINUITÀ

Funzioni reali di due variabili reali

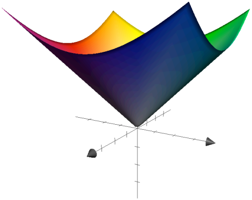
Le funzioni di cui ci si occuperà d'ora in poi sono le funzioni reali di due variabili reali , ossia funzioni definite in sottoinsiemi A di $\mathbb{R}^2$ ed aventi valori in sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:

$$f : (x, y) \in A \subseteq \mathbb{R}^2 \to z = f(x, y) \in \mathbb{R}$$

A sarà detto dominio o insieme di definizione o campo di esistenza.
Si supporrà sempre, poi, che il codominio coincida con l'insieme dei valori.

Grafico di funzioni di due variabili

Il grafico di una funzioni di due variabili reali, ossia l'insieme dei punti dello spazio di coordinate (x, y, z) tali che $(x, y) \in A$ e $z = f(x, y)$ è una superficie di $\mathbb{R}^3$, nel senso intuitivo del termine.



Talvolta per denotare la funzione
$f : (x, y) \in A \subseteq \mathbb{R}^2 \to z = f(x, y) \in \mathbb{R}$
utilizzeremo la notazione $z = f(x, y)$, $(x, y) \in A$, purchè non si dia adito a confusione.

2. Limiti di funzioni di due variabili

LEZIONE: FUNZIONI DI DUE VARIABILI. LIMITI E CONTINUITÀ

Definizione di limite finito

Il concetto di limite per funzioni di due variabili non differisce nella sostanza da quello per le funzioni di una variabile, cambia ovviamente la nozione di intorno: in $\mathbb{R}$ è un intervallo, in $\mathbb{R}^2$ un cerchio.

Definizione

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, sia (x_0, y_0) un punto di accumulazione di A. Si dice che

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L \in \mathbb{R}$$

se $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta_\varepsilon : \forall (x, y) \in [I_\delta(x_0, y_0) \cap A] \setminus \{(x_0, y_0)\}$, vale che

$$|f(x, y) - L| < \varepsilon.$$

Esempio 1

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Ovviamente in questo caso $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ è definita in $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ed, ovviamente, $(0,0)$ è di accumulazione per A. Osserviamo che $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ vale che

$$0 \leq (|x| - |y|)^2 = x^2 + y^2 - 2\,|xy| \quad \Rightarrow \quad |xy| \leq \frac{x^2+y^2}{2}.$$

Quindi $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$|f(x,y) - L| = \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}.$$

In definitiva $|f(x,y) - L| < \varepsilon$ se $\sqrt{x^2+y^2} < 2\varepsilon$, ovvero $\delta_\varepsilon = 2\varepsilon$.

Esempio 2

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^4+y^4)}{x^4+y^4} = 1.$$

Dal momento che

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \widetilde{\delta} = \widetilde{\delta}_\varepsilon > 0 : \forall t \in \left(-\widetilde{\delta}_\varepsilon, \widetilde{\delta}_\varepsilon\right) \setminus \{0\} \quad \left|\frac{\operatorname{sen} t}{t} - 1\right| < \varepsilon$$

ed inoltre

$$0 \le x^4 + y^4 \le x^4 + y^4 + 2x^2y^2 = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^4 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Quindi se $\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^4 < \widetilde{\delta}_\varepsilon$, ovvero, $\sqrt{x^2+y^2} < \sqrt[4]{\widetilde{\delta}_\varepsilon} \equiv \delta_\varepsilon$, accade che

$$\left|\frac{\operatorname{sen}(x^4+y^4)}{x^4+y^4} - 1\right| < \varepsilon.$$

Definizione di limite infinito

Definizione

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, sia (x_0, y_0) un punto di accumulazione di A. Si dice che

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = +\infty \ (-\infty)$$

se $\forall M > 0 \ \exists \delta = \delta_M > 0 : \forall (x,y) \in [I_\delta(x_0,y_0) \cap A] \setminus \{(x_0,y_0)\}$, vale che

$$f(x,y) > M \ (< -M).$$

Esempio 3

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\log(1+|xy|)} = +\infty.$$

Utilizzando il fatto che

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{\log(1+|t|)} = +\infty$$

e la disuguaglianza

$$|xy| \le (x^2+y^2)/2,$$

si ottiene l'asserto.

Una condizione necessaria per l'esistenza del limite

Teorema

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, sia (x_0, y_0) un punto di accumulazione di A; sia inoltre C un qualunque sottoinsieme di A tale che (x_0, y_0) sia di accumulazione pure per C. Allora si verifica subito che

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \Rightarrow \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0) \\ (x,y)\in C}} f(x,y) = L.$$

Osservazione

Questa Proposizione viene spesso usata per dimostrare che un limite non esiste.

Esempio 4

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Sia C_m la seguente famiglia di insiemi (C_m rappresenta il fascio di rette passante per l'origine degli assi)

$$C_m = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = mx \text{ con } x \neq 0 \text{ e } m \in \mathbb{R}\right\}.$$

Se la funzione data ammettesse limite, detto L tale limite, per la Proposizione appena enunciata si dovrebbe avere che

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in C_m}} \frac{x^2 + 2xy}{x^2 + y^2} = L, \ \forall m \in \mathbb{R},$$

ma questo è falso in quanto

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in C_m}} \frac{x^2 + 2xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + 2mx^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{1 + 2m}{1 + m^2}.$$

Osservazione

Il fatto che una funzione abbia lo stesso limite lungo ogni retta non garantisce l'esistenza del limite.

A tal proposito consideriamo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}. \tag{1}$$

Osservazione

Sia C_m la famiglia di insiemi definita nell'esercizio precedente, allora

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in C_m}} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{m^2x^3}{x^2+m^4x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{m^2x}{1+m^4x^2} = 0, \ \forall m \in \mathbb{R}.$$

Non si può concludere che il limite in (1) sia zero, infatti se ci si avvicina all'origine lungo la parabola di equazione $x = y^2$, si ottiene

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\x=y^2}} \frac{y^4}{y^4+y^4} = \frac{1}{2}$$

e quindi il limite non esiste.

3. Funzioni continue

LEZIONE: FUNZIONI DI DUE VARIABILI. LIMITI E CONTINUITÀ

Funzioni continue

La definizione di funzione continua è analoga a quella data per le funzioni di una variabile.

Definizione

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e sia $(x_0, y_0) \in A$ e di accumulazione per A.
Si dice che la funzione f è continua in (x_0, y_0) se

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0),$$

e dunque, se $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta_\varepsilon > 0$:

$$|f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon\ \forall (x,y) \in I_\delta(x_0,y_0) \cap A.$$

Osservazione

Osservazione

I polinomi sono funzioni continue.
Come per le funzioni di una variabile, somme, differenze, prodotti, quozienti e composizioni di funzioni continue, sono continue.

Proprietà delle funzioni continue

Teorema (Teorema di Weierstrass)

Sia K un insieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^2$, ed $f(x, y)$ una funzione continua su K. Allora f ammette massimo assoluto M e minimo assoluto m in K, cioè esistono due punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2) in K, tali che

$$m = f(x_1, y_1) \leq f(x, y) \leq f(x_2, y_2) = M, \quad \forall (x, y) \in K.$$

Teorema (Teorema sull'esistenza dei valori intermedi)

Sia D un dominio connesso e limitato di $\mathbb{R}^2$, ed $f(x, y)$ una funzione continua su D. Allora f assume tutti i valori compresi tra il suo minimo e il suo massimo assoluti su D.