1. Definizioni e prime proprietà

SERIE di POTENZE

Definizione di serie di potenza

Definizione

Data una successione di numeri reali $\{a_n\}$, al variare di x la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{1}$$

è nota come serie di potenza di punto iniziale x_0. I termini della successione a_n si chiamano coefficienti della serie.

Con un semplice cambio di variabile in (1) è possibile ricondursi sempre a studiare serie di potenze di punto iniziale $x_0 = 0$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n \tag{2}$$

Osservazione

Fissato x la serie di potenze (2) può essere convergente divergente o indeterminata. Si pone quindi il problema di determinare l'insieme dei numeri reali x tali che la serie converga.

Definizione

L'insieme degli x per cui la serie è convergente è detto insieme di convergenza.

È evidente che la serie di potenze (2) ha insieme di convergenza non vuoto, perchè converge sicuramente per $x = 0$. Inoltre si dimostra che l'insieme di convergenza è un intervallo centrato nell'origine, eventualmente ridotto ad un sol punto o coincidente con $\mathbb{R}$.

Raggio di convergenza

Vale il seguente teorema:

Teorema

Data la serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ *si verifica sempre una delle seguenti circostanze:*

- *la serie converge solo per* $x = 0$
- *la serie converge per ogni* $x \in \mathbb{R}$
- *esiste un numero reale* $R > 0$ *tale che la serie converge per* $|x| < R$ *e non converge per* $|x| > R$.

Il numero reale R è detto raggio di convergenza.

Osservazioni sul raggio di convergenza

Dal teorema precedente segue che l'insieme di convergenza è un intervallo centrato nell'origine, eventualmente ridotto ad un sol punto (caso $R = 0$) o coincidente con $\mathbb{R}$ (caso $R = +\infty$).

Si osservi che senza ulteriori indagini non si può dire nulla sul comportamento della serie per $x = \pm R$ nel caso $R \in \mathbb{R}$.

Calcolo del raggio di convergenza

Le seguenti proposizioni permettono il calcolo del raggio di convergenza della serie di potenze

Teorema (Criterio della radice)

Se esiste il limite

$$l = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

allora il raggio di convergenza della serie (2) è uguale a

$$R = \begin{cases} 1/l & \textit{se } l \neq 0, +\infty \\ +\infty & \textit{se } l = 0 \\ 0 & \textit{se } l = \infty \end{cases}$$

Calcolo del raggio di convergenza

Teorema (Criterio del rapporto)

Se $a_n \neq 0$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *ed esiste il limite*

$$l = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|,$$

allora il raggio di convergenza della serie (2) è uguale a

$$R = \begin{cases} 1/l & se\ l \neq 0, +\infty \\ +\infty & se\ l = 0 \\ 0 & se\ l = \infty \end{cases}$$

Esempi

Calcoliamo il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n!} x^n.$$

Conviene usare il criterio del rapporto.

Calcoliamo $\lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{n+2}{(n+1)!}}{\frac{n+1}{n!}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n+2}{(n+1)^2} = 0$, per cui $R = +\infty$, cioé la serie converge per $x \in]-\infty, +\infty[$.

Esempi

Calcoliamo il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{2^n} x^n.$$

Conviene usare il criterio della radice.
Calcoliamo $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{2^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2} = +\infty$, per cui $R = 0$, cioé la serie converge solo per $x = 0$.

Esempi

Calcoliamo il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-3}{5^n} x^n.$$

Conviene usare il criterio del rapporto.

Calcoliamo $\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(2(n+1)-3)!}{5^{n+1}}}{\frac{2n-3}{5^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n-1}{5(2n-3)} = \frac{1}{5}$, per cui $R = 5$, cioé la serie converge per $x \in]-5, 5[$.

Esempi

Calcoliamo il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{4^n}{(n+2)^n} x^n$$

Conviene usare il criterio della radice.
Calcoliamo $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{4}{(n+2)} = 0$, per cui $R = +\infty$,
cioé la serie converge per $x \in \mathbb{R}$.

Calcoliamo il raggio di convergenza della serie

$$(3) \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{2^n}(x-3)^n.$$

Ponendo $y = x - 3$ la serie si riconduce alla seguente serie di punto iniziale zero:

$$(4) \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{2^n} y^n.$$

Conviene usare il criterio del rapporto.
Calcoliamo $\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n}{2^{n+1}}}{\frac{n-1}{2^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2(n-1)} = \frac{1}{2}$, per cui $R = 2$, cioé la serie (4) converge per $y \in]-2, 2[$ e la serie (3) converge per $x \in]1, 5[$.

Esempi

Calcoliamo il raggio di convergenza della serie

(5) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{3^{n-1}n!}(x^2-3)^n.$$

Ponendo $y = x^2 - 3$ la serie si riconduce alla seguente serie di punto iniziale zero:

(6) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{3^{n-1}n!}y^n.$$

Conviene usare il criterio del rapporto.
Calcoliamo $\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n+2}{3^n(n+1)!}}{\frac{n+1}{3^{n-1}n!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{3(n+1)^2} = 0$, per cui $R = +\infty$, cioé la serie (6) converge per $y \in \mathbb{R}$ e la serie (5) converge per $x \in \mathbb{R}$.