Probabilità condizionale e indipendenza

Corso di “Probabilità e Fenomeni Aleatori”

Laurea in Ingegneria Informatica, Biomedica e delle Telecomunicazioni

Donatella Darsena

Università di Napoli Parthenope

darsena@uniparthenope.it

a.a. 2020-21

Contenuti

- Probabilità condizionale
- Legge della probabilità composta
- Regola della catena
- Indipendenza tra eventi
- Teorema della probabilità totale
- Teorema di Bayes

Introduzione

- Il concetto di **probabilità condizionale** è fondamentale per lo studio della dipendenza/indipendenza tra eventi di uno spazio di probabilità

Introduzione

- Il concetto di **probabilità condizionale** è fondamentale per lo studio della dipendenza/indipendenza tra eventi di uno spazio di probabilità
- Dato un evento A, sappiamo interpretare $P(A)$

Introduzione

- Il concetto di **probabilità condizionale** è fondamentale per lo studio della dipendenza/indipendenza tra eventi di uno spazio di probabilità
- Dato un evento A, sappiamo interpretare $P(A) \Rightarrow$ misura dell'incertezza relativa al verificarsi di A

Introduzione

- Il concetto di **probabilità condizionale** è fondamentale per lo studio della dipendenza/indipendenza tra eventi di uno spazio di probabilità
- Dato un evento A, sappiamo interpretare $P(A) \Rightarrow$ misura dell'incertezza relativa al verificarsi di A
- Come cambia l'incertezza relativa ad A se sappiamo che si è verificato un secondo evento B?

Introduzione

- Il concetto di **probabilità condizionale** è fondamentale per lo studio della dipendenza/indipendenza tra eventi di uno spazio di probabilità
- Dato un evento A, sappiamo interpretare $P(A) \Rightarrow$ misura dell'incertezza relativa al verificarsi di A
- Come cambia l'incertezza relativa ad A se sappiamo che si è verificato un secondo evento B? $\Rightarrow P(A|B)$ è la **probabilità condizionale** di A (dato B)

Introduzione

- Il concetto di **probabilità condizionale** è fondamentale per lo studio della dipendenza/indipendenza tra eventi di uno spazio di probabilità
- Dato un evento A, sappiamo interpretare $P(A) \Rightarrow$ misura dell'incertezza relativa al verificarsi di A
- Come cambia l'incertezza relativa ad A se sappiamo che si è verificato un secondo evento B? $\Rightarrow P(A|B)$ è la **probabilità condizionale** di A (dato B)
- Intuitivamente, se esiste un legame tra A e $B \Rightarrow P(A) \neq P(A|B)$

Introduzione

- Il concetto di **probabilità condizionale** è fondamentale per lo studio della dipendenza/indipendenza tra eventi di uno spazio di probabilità
- Dato un evento A, sappiamo interpretare $P(A) \Rightarrow$ misura dell'incertezza relativa al verificarsi di A
- Come cambia l'incertezza relativa ad A se sappiamo che si è verificato un secondo evento B? $\Rightarrow P(A|B)$ è la **probabilità condizionale** di A (dato B)
- Intuitivamente, se esiste un legame tra A e $B \Rightarrow P(A) \neq P(A|B)$
- *Esempio 2.1:* lancio del dado, $A = \{6\}$, $B = \{\text{pari}\}$

Probabilità condizionale

Probabilità condizionale

A e B eventi di uno spazio di probabilità, con $P(B) \neq 0$:

$$P(A|B) \triangleq \frac{P(AB)}{P(B)} \qquad \text{"probabilità di } A \text{ dato } B\text{"}$$

Nota: $P(AB) = P(A \cap B)$

Probabilità condizionale

Probabilità condizionale

A e B eventi di uno spazio di probabilità, con $P(B) \neq 0$:

$$P(A|B) \triangleq \frac{P(AB)}{P(B)} \qquad \text{"probabilità di } A \text{ dato } B\text{"}$$

Nota: $P(AB) = P(A \cap B)$

- $P(A|B)$ è un "raffinamento" della probabilità di A $\Rightarrow$ tiene conto delle informazioni fornite dal verificarsi di B

Probabilità condizionale

Probabilità condizionale

A e B eventi di uno spazio di probabilità, con $P(B) \neq 0$:

$$P(A|B) \triangleq \frac{P(AB)}{P(B)} \qquad \text{"probabilità di } A \text{ dato } B\text{"}$$

Nota: $P(AB) = P(A \cap B)$

- $P(A|B)$ è un "raffinamento" della probabilità di A $\Rightarrow$ tiene conto delle informazioni fornite dal verificarsi di B
- *Esempio 2.2:* $A = \{\text{piove}\}$, $B = \{\text{estate}\}$ $\Rightarrow$ $P(A|B) < P(A)$

Probabilità condizionale

Probabilità condizionale

A e B eventi di uno spazio di probabilità, con $P(B) \neq 0$:

$$P(A|B) \triangleq \frac{P(AB)}{P(B)} \qquad \text{"probabilità di } A \text{ dato } B\text{"}$$

Nota: $P(AB) = P(A \cap B)$

- $P(A|B)$ è un "raffinamento" della probabilità di A $\Rightarrow$ tiene conto delle informazioni fornite dal verificarsi di B
- *Esempio 2.2:* $A = \{\text{piove}\}$, $B = \{\text{estate}\} \Rightarrow P(A|B) < P(A)$
  $A = \{\text{piove}\}$, $B = \{\text{inverno}\} \Rightarrow P(A|B) > P(A)$

Probabilità condizionale

Probabilità condizionale

A e B eventi di uno spazio di probabilità, con $P(B) \neq 0$:

$$P(A|B) \triangleq \frac{P(AB)}{P(B)} \qquad \text{"probabilità di } A \text{ dato } B\text{"}$$

Nota: $P(AB) = P(A \cap B)$

- $P(A|B)$ è un "raffinamento" della probabilità di A $\Rightarrow$ tiene conto delle informazioni fornite dal verificarsi di B
- *Esempio 2.2:* $A = \{\text{piove}\}$, $B = \{\text{estate}\}$ $\Rightarrow$ $P(A|B) < P(A)$
  $A = \{\text{piove}\}$, $B = \{\text{inverno}\}$ $\Rightarrow$ $P(A|B) > P(A)$
- In generale:

Probabilità condizionale

Probabilità condizionale

A e B eventi di uno spazio di probabilità, con $P(B) \neq 0$:

$$P(A|B) \triangleq \frac{P(AB)}{P(B)} \qquad \text{"probabilità di } A \text{ dato } B\text{"}$$

Nota: $P(AB) = P(A \cap B)$

- $P(A|B)$ è un "raffinamento" della probabilità di A $\Rightarrow$ tiene conto delle informazioni fornite dal verificarsi di B
- *Esempio 2.2:* $A = \{\text{piove}\}$, $B = \{\text{estate}\}$ $\Rightarrow$ $P(A|B) < P(A)$
  $A = \{\text{piove}\}$, $B = \{\text{inverno}\}$ $\Rightarrow$ $P(A|B) > P(A)$
- In generale:
  - $P(A|B) > P(A)$ $\Rightarrow$ A è "attratto" da B

Probabilità condizionale

Probabilità condizionale

A e B eventi di uno spazio di probabilità, con $P(B) \neq 0$:

$$P(A|B) \triangleq \frac{P(AB)}{P(B)} \qquad \text{"probabilità di } A \text{ dato } B\text{"}$$

Nota: $P(AB) = P(A \cap B)$

- $P(A|B)$ è un "raffinamento" della probabilità di A $\Rightarrow$ tiene conto delle informazioni fornite dal verificarsi di B
- *Esempio 2.2:* $A = \{\text{piove}\}$, $B = \{\text{estate}\}$ $\Rightarrow$ $P(A|B) < P(A)$
  $A = \{\text{piove}\}$, $B = \{\text{inverno}\}$ $\Rightarrow$ $P(A|B) > P(A)$
- In generale:
  - $P(A|B) > P(A)$ $\Rightarrow$ A è "attratto" da B
  - $P(A|B) < P(A)$ $\Rightarrow$ A è "respinto" da B

Probabilità condizionale

Probabilità condizionale

A e B eventi di uno spazio di probabilità, con $P(B) \neq 0$:

$$P(A|B) \triangleq \frac{P(AB)}{P(B)} \qquad \text{"probabilità di } A \text{ dato } B\text{"}$$

Nota: $P(AB) = P(A \cap B)$

- $P(A|B)$ è un "raffinamento" della probabilità di A $\Rightarrow$ tiene conto delle informazioni fornite dal verificarsi di B
- *Esempio 2.2:* $A = \{\text{piove}\}$, $B = \{\text{estate}\}$ $\Rightarrow$ $P(A|B) < P(A)$
  $A = \{\text{piove}\}$, $B = \{\text{inverno}\}$ $\Rightarrow$ $P(A|B) > P(A)$
- In generale:
  - $P(A|B) > P(A)$ $\Rightarrow$ A è "attratto" da B
  - $P(A|B) < P(A)$ $\Rightarrow$ A è "respinto" da B
  - $P(A|B) = P(A)$ $\Rightarrow$ A è "indifferente" a B (*indipendenza*, vedi dopo)

Proprietà ed interpretazioni

- La probabilità condizionale dipende dall'ordine degli eventi:

$$P(A|B) \triangleq \frac{P(AB)}{P(B)} \qquad\qquad P(B|A) \triangleq \frac{P(BA)}{P(A)}$$

quindi $P(A|B) \neq P(B|A)$ in generale (il denominatore è differente)

Proprietà ed interpretazioni

- La probabilità condizionale dipende dall'ordine degli eventi:

$$P(A|B) \triangleq \frac{P(AB)}{P(B)} \qquad\qquad P(B|A) \triangleq \frac{P(BA)}{P(A)}$$

quindi $P(A|B) \neq P(B|A)$ in generale (il denominatore è differente)

  - *es.* $B \subseteq A$ (B implica A) $\Rightarrow \begin{cases} P(A|B) = 1 \\ P(B|A) \geq P(B) \end{cases}$

Proprietà ed interpretazioni

- La probabilità condizionale dipende dall'ordine degli eventi:

$$P(A|B) \triangleq \frac{P(AB)}{P(B)} \qquad\qquad P(B|A) \triangleq \frac{P(BA)}{P(A)}$$

quindi $P(A|B) \neq P(B|A)$ in generale (il denominatore è differente)

  - *es.* $B \subseteq A$ (B implica A) $\Rightarrow \begin{cases} P(A|B) = 1 \\ P(B|A) \geq P(B) \end{cases}$

- Fissato $B \subseteq \Omega$, due possibili interpretazioni per $P(A|B)$:

Proprietà ed interpretazioni

- La probabilità condizionale dipende dall'ordine degli eventi:

$$P(A|B) \triangleq \frac{P(AB)}{P(B)} \qquad\qquad P(B|A) \triangleq \frac{P(BA)}{P(A)}$$

quindi $P(A|B) \neq P(B|A)$ in generale (il denominatore è differente)

  - *es.* $B \subseteq A$ (B implica A) $\Rightarrow \begin{cases} P(A|B) = 1 \\ P(B|A) \geq P(B) \end{cases}$

- Fissato $B \subseteq \Omega$, due possibili interpretazioni per $P(A|B)$:
  (1) definisce una nuova legge di probabilità sullo stesso $\Omega \Rightarrow$ gli assiomi di Kolmogorov sono soddisfatti

Proprietà ed interpretazioni

- La probabilità condizionale dipende dall'ordine degli eventi:

$$P(A|B) \triangleq \frac{P(AB)}{P(B)} \qquad\qquad P(B|A) \triangleq \frac{P(BA)}{P(A)}$$

quindi $P(A|B) \neq P(B|A)$ in generale (il denominatore è differente)

  - *es.* $B \subseteq A$ (B implica A) $\Rightarrow \begin{cases} P(A|B) = 1 \\ P(B|A) \geq P(B) \end{cases}$

- Fissato $B \subseteq \Omega$, due possibili interpretazioni per $P(A|B)$:
  (1) definisce una nuova legge di probabilità sullo stesso $\Omega \Rightarrow$ gli assiomi di Kolmogorov sono soddisfatti
  (2) definisce una legge di probabilità su un nuovo spazio campione $\Omega_B = B$ (restrizione della legge originale all'insieme B) $\Rightarrow$ gli assiomi di Kolmogorov sono soddisfatti

Legge della probabilità composta

- Dalla definizione di probabilità condizionale segue la legge della **probabilità composta:**

$$P(AB) = P(A|B)\,P(B) = P(B|A)\,P(A)$$

Legge della probabilità composta

- Dalla definizione di probabilità condizionale segue la legge della **probabilità composta:**

$$P(AB) = P(A|B)\,P(B) = P(B|A)\,P(A)$$

  - decompone in più passi il calcolo di $P(AB)$ (probabilità congiunta di A e B)

Legge della probabilità composta

- Dalla definizione di probabilità condizionale segue la legge della **probabilità composta:**

$$P(AB) = P(A|B)\,P(B) = P(B|A)\,P(A)$$

  - decompone in più passi il calcolo di $P(AB)$ (probabilità congiunta di A e B)
  - matematicamente, l'ordine degli eventi è ininfluente

Legge della probabilità composta

- Dalla definizione di probabilità condizionale segue la legge della **probabilità composta:**

$$P(AB) = P(A|B)\,P(B) = P(B|A)\,P(A)$$

  - decompone in più passi il calcolo di $P(AB)$ (probabilità congiunta di A e B)
  - matematicamente, l'ordine degli eventi è ininfluente
  - in pratica conviene condizionare all'evento che si verifica "prima" (logicamente o cronologicamente)

Legge della probabilità composta

- Dalla definizione di probabilità condizionale segue la legge della **probabilità composta:**

$$P(AB) = P(A|B)\,P(B) = P(B|A)\,P(A)$$

  - decompone in più passi il calcolo di $P(AB)$ (probabilità congiunta di A e B)
  - matematicamente, l'ordine degli eventi è ininfluente
  - in pratica conviene condizionare all'evento che si verifica "prima" (logicamente o cronologicamente)

- *Esempio 2.3:* estrazione di una coppia di palle da una scatola contenente tre palle bianche e due rosse

Legge della probabilità composta

- Dalla definizione di probabilità condizionale segue la legge della **probabilità composta:**

$$P(AB) = P(A|B)\,P(B) = P(B|A)\,P(A)$$

  - decompone in più passi il calcolo di $P(AB)$ (probabilità congiunta di A e B)
  - matematicamente, l'ordine degli eventi è ininfluente
  - in pratica conviene condizionare all'evento che si verifica "prima" (logicamente o cronologicamente)

- *Esempio 2.3:* estrazione di una coppia di palle da una scatola contenente tre palle bianche e due rosse
  - soluzione combinatoria vs. soluzione con probabilità condizionale

Regola della catena

- Probabilità condizionale per più eventi:

$$P(A|B,C) \triangleq \frac{P(ABC)}{P(BC)} \qquad P(BC) \neq 0$$

  - *Nota:* $P(A|B,C) = P(A|BC)$ $\Rightarrow$ l'evento condizionante è $B \cap C$

Regola della catena

- Probabilità condizionale per più eventi:

$$P(A|B,C) \triangleq \frac{P(ABC)}{P(BC)} \qquad P(BC) \neq 0$$

  - *Nota:* $P(A|B,C) = P(A|BC) \Rightarrow$ l'evento condizionante è $B \cap C$

- Applicando la legge della probabilità composta a $P(BC)$ si trova:

$$P(ABC) = P(C)\,P(B|C)\,P(A|B,C)$$

Regola della catena

- Probabilità condizionale per più eventi:

$$P(A|B,C) \triangleq \frac{P(ABC)}{P(BC)} \qquad P(BC) \neq 0$$

  - *Nota:* $P(A|B,C) = P(A|BC) \Rightarrow$ l'evento condizionante è $B \cap C$

- Applicando la legge della probabilità composta a $P(BC)$ si trova:

$$P(ABC) = P(C)\,P(B|C)\,P(A|B,C)$$

  - successione logica $C \rightarrow B \rightarrow A$

Regola della catena

- Probabilità condizionale per più eventi:

$$P(A|B,C) \triangleq \frac{P(ABC)}{P(BC)} \qquad P(BC) \neq 0$$

  - *Nota:* $P(A|B,C) = P(A|BC)$ $\Rightarrow$ l'evento condizionante è $B \cap C$

- Applicando la legge della probabilità composta a $P(BC)$ si trova:

$$P(ABC) = P(C)\,P(B|C)\,P(A|B,C)$$

  - successione logica $C \rightarrow B \rightarrow A$
  - scegliendo $A \rightarrow B \rightarrow C$ $\Rightarrow$ $P(ABC) = P(A)\,P(B|A)\,P(C|A,B)$

Regola della catena

- Probabilità condizionale per più eventi:

$$P(A|B,C) \triangleq \frac{P(ABC)}{P(BC)} \qquad P(BC) \neq 0$$

  - *Nota:* $P(A|B,C) = P(A|BC) \Rightarrow$ l'evento condizionante è $B \cap C$

- Applicando la legge della probabilità composta a $P(BC)$ si trova:

$$P(ABC) = P(C)\,P(B|C)\,P(A|B,C)$$

  - successione logica $C \to B \to A$
  - scegliendo $A \to B \to C \Rightarrow P(ABC) = P(A)\,P(B|A)\,P(C|A,B)$
  - esistono $3! = 6$ differenti modi di scrivere $P(ABC)$

Regola della catena

- Probabilità condizionale per più eventi:

$$P(A|B,C) \triangleq \frac{P(ABC)}{P(BC)} \qquad P(BC) \neq 0$$

  - *Nota:* $P(A|B,C) = P(A|BC) \Rightarrow$ l'evento condizionante è $B \cap C$

- Applicando la legge della probabilità composta a $P(BC)$ si trova:

$$P(ABC) = P(C)\,P(B|C)\,P(A|B,C)$$

  - successione logica $C \to B \to A$
  - scegliendo $A \to B \to C \Rightarrow P(ABC) = P(A)\,P(B|A)\,P(C|A,B)$
  - esistono $3! = 6$ differenti modi di scrivere $P(ABC)$

Regola della catena

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)\,P(A_2|A_1)\,P(A_3|A_1,A_2)\cdots P(A_n|A_1,A_2,\cdots,A_{n-1})$$

Regola della catena

- Probabilità condizionale per più eventi:

$$P(A|B,C) \triangleq \frac{P(ABC)}{P(BC)} \qquad P(BC) \neq 0$$

  - *Nota:* $P(A|B,C) = P(A|BC) \Rightarrow$ l'evento condizionante è $B \cap C$

- Applicando la legge della probabilità composta a $P(BC)$ si trova:

$$P(ABC) = P(C)\, P(B|C)\, P(A|B,C)$$

  - successione logica $C \to B \to A$
  - scegliendo $A \to B \to C \Rightarrow P(ABC) = P(A)\, P(B|A)\, P(C|A,B)$
  - esistono $3! = 6$ differenti modi di scrivere $P(ABC)$

Regola della catena

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)\, P(A_2|A_1)\, P(A_3|A_1,A_2) \cdots P(A_n|A_1,A_2,\cdots,A_{n-1})$$

  - si può scrivere in $n!$ modi differenti (permutazioni degli eventi $A_1, A_2, \dots A_n$)

Indipendenza tra due eventi

- La condizione di "indifferenza" $P(A|B) = P(A)$ si chiama **indipendenza** (statistica)

Indipendenza tra due eventi

- La condizione di "indifferenza" $P(A|B) = P(A)$ si chiama **indipendenza** (statistica)
  - sapere che si è verificato B non fornisce nessuna informazione aggiuntiva su $A \Rightarrow$ la probabilità di A non cambia

Indipendenza tra due eventi

- La condizione di "indifferenza" $P(A|B) = P(A)$ si chiama **indipendenza** (statistica)
  - sapere che si è verificato B non fornisce nessuna informazione aggiuntiva su $A \Rightarrow$ la probabilità di A non cambia
- $P(A|B) = P(A) \Rightarrow P(B|A) = P(B) \Rightarrow$ l'indipendenza è una proprietà *simmetrica*

Indipendenza tra due eventi

- La condizione di "indifferenza" $P(A|B) = P(A)$ si chiama **indipendenza** (statistica)
  - sapere che si è verificato B non fornisce nessuna informazione aggiuntiva su $A \Rightarrow$ la probabilità di A non cambia
- $P(A|B) = P(A) \Rightarrow P(B|A) = P(B) \Rightarrow$ l'indipendenza è una proprietà *simmetrica*
- Sostituendo nella legge di probabilità composta si ha la seguente definizione (simmetrica) di indipendenza:

Indipendenza tra due eventi

Gli eventi A e B sono indipendenti se $P(A\,B) = P(A)\,P(B)$

Indipendenza tra due eventi

- La condizione di "indifferenza" $P(A|B) = P(A)$ si chiama **indipendenza** (statistica)
  - sapere che si è verificato B non fornisce nessuna informazione aggiuntiva su $A \Rightarrow$ la probabilità di A non cambia
- $P(A|B) = P(A) \Rightarrow P(B|A) = P(B) \Rightarrow$ l'indipendenza è una proprietà *simmetrica*
- Sostituendo nella legge di probabilità composta si ha la seguente definizione (simmetrica) di indipendenza:

Indipendenza tra due eventi

Gli eventi A e B sono indipendenti se $P(A\,B) = P(A)\,P(B)$

  - la probabilità congiunta si fattorizza nel prodotto delle probabilità *marginali*

Indipendenza tra due eventi

- La condizione di "indifferenza" $P(A|B) = P(A)$ si chiama **indipendenza** (statistica)
  - sapere che si è verificato B non fornisce nessuna informazione aggiuntiva su $A \Rightarrow$ la probabilità di A non cambia
- $P(A|B) = P(A) \Rightarrow P(B|A) = P(B) \Rightarrow$ l'indipendenza è una proprietà *simmetrica*
- Sostituendo nella legge di probabilità composta si ha la seguente definizione (simmetrica) di indipendenza:

Indipendenza tra due eventi

Gli eventi A e B sono indipendenti se $P(A\,B) = P(A)\,P(B)$

  - la probabilità congiunta si fattorizza nel prodotto delle probabilità *marginali*
  - non confondere eventi *indipendenti* con eventi *mutuamente esclusivi*!

Indipendenza tra due eventi

- La condizione di "indifferenza" $P(A|B) = P(A)$ si chiama **indipendenza** (statistica)
  - sapere che si è verificato B non fornisce nessuna informazione aggiuntiva su $A \Rightarrow$ la probabilità di A non cambia
- $P(A|B) = P(A) \Rightarrow P(B|A) = P(B) \Rightarrow$ l'indipendenza è una proprietà *simmetrica*
- Sostituendo nella legge di probabilità composta si ha la seguente definizione (simmetrica) di indipendenza:

Indipendenza tra due eventi

Gli eventi A e B sono indipendenti se $P(A\,B) = P(A)\,P(B)$

  - la probabilità congiunta si fattorizza nel prodotto delle probabilità *marginali*
  - non confondere eventi *indipendenti* con eventi *mutuamente esclusivi*!

Indipendenza tra due eventi

- La condizione di "indifferenza" $P(A|B) = P(A)$ si chiama **indipendenza** (statistica)
  - sapere che si è verificato B non fornisce nessuna informazione aggiuntiva su $A \Rightarrow$ la probabilità di A non cambia
- $P(A|B) = P(A) \Rightarrow P(B|A) = P(B) \Rightarrow$ l'indipendenza è una proprietà *simmetrica*
- Sostituendo nella legge di probabilità composta si ha la seguente definizione (simmetrica) di indipendenza:

Indipendenza tra due eventi

Gli eventi A e B sono indipendenti se $P(A\,B) = P(A)\,P(B)$

  - la probabilità congiunta si fattorizza nel prodotto delle probabilità *marginali*
  - non confondere eventi *indipendenti* con eventi *mutuamente esclusivi*!
- *Esempio 2.6:* lancio di una moneta due volte

Indipendenza tra tre eventi

- L'indipendenza tra tre eventi si definisce come segue:

Indipendenza tra tre eventi

- L'indipendenza tra tre eventi si definisce come segue:

Indipendenza tra tre eventi

Gli eventi A, B, C sono indipendenti se:

(1) $P(AB) = P(A)P(B)$, $P(BC) = P(B)P(C)$, $P(AC) = P(A)P(C)$ (*indipendenza a coppie*)

(2) $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$

Indipendenza tra tre eventi

- L'indipendenza tra tre eventi si definisce come segue:

Indipendenza tra tre eventi

Gli eventi A, B, C sono indipendenti se:

(1) $P(AB) = P(A)P(B)$, $P(BC) = P(B)P(C)$, $P(AC) = P(A)P(C)$ (*indipendenza a coppie*)

(2) $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$

- Non basta assumere solo la seconda fattorizzazione

Indipendenza tra tre eventi

- L'indipendenza tra tre eventi si definisce come segue:

Indipendenza tra tre eventi

Gli eventi A, B, C sono indipendenti se:

(1) $P(AB) = P(A)P(B)$, $P(BC) = P(B)P(C)$, $P(AC) = P(A)P(C)$ (*indipendenza a coppie*)

(2) $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$

- Non basta assumere solo la seconda fattorizzazione
- Intuitivamente, in tutte le probabilità condizionali che coinvolgono i tre eventi $\Rightarrow$ il condizionamento non opera:

Indipendenza tra tre eventi

- L'indipendenza tra tre eventi si definisce come segue:

Indipendenza tra tre eventi

Gli eventi A, B, C sono indipendenti se:

(1) $P(AB) = P(A)P(B)$, $P(BC) = P(B)P(C)$, $P(AC) = P(A)P(C)$ (*indipendenza a coppie*)

(2) $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$

- Non basta assumere solo la seconda fattorizzazione
- Intuitivamente, in tutte le probabilità condizionali che coinvolgono i tre eventi $\Rightarrow$ il condizionamento non opera:
  - *es.* $P(A|B, C) = P(A)$, $P(B|A, C) = P(B)$, $P(C|A, B) = P(C)$

Indipendenza tra tre eventi

- L'indipendenza tra tre eventi si definisce come segue:

Indipendenza tra tre eventi

Gli eventi A, B, C sono indipendenti se:

(1) $P(AB) = P(A)P(B)$, $P(BC) = P(B)P(C)$, $P(AC) = P(A)P(C)$ (*indipendenza a coppie*)

(2) $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$

- Non basta assumere solo la seconda fattorizzazione
- Intuitivamente, in tutte le probabilità condizionali che coinvolgono i tre eventi $\Rightarrow$ il condizionamento non opera:
  - *es.* $P(A|B,C) = P(A)$, $P(B|A,C) = P(B)$, $P(C|A,B) = P(C)$
  - *es.* $P(AB|C) = P(AB)$, $P(AC|B) = P(AC)$, $P(BC|A) = P(BC)$

Indipendenza tra tre eventi

- L'indipendenza tra tre eventi si definisce come segue:

Indipendenza tra tre eventi

Gli eventi A, B, C sono indipendenti se:

(1) $P(AB) = P(A)P(B)$, $P(BC) = P(B)P(C)$, $P(AC) = P(A)P(C)$ (*indipendenza a coppie*)

(2) $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$

- Non basta assumere solo la seconda fattorizzazione
- Intuitivamente, in tutte le probabilità condizionali che coinvolgono i tre eventi $\Rightarrow$ il condizionamento non opera:
  - *es.* $P(A|B, C) = P(A)$, $P(B|A, C) = P(B)$, $P(C|A, B) = P(C)$
  - *es.* $P(AB|C) = P(AB)$, $P(AC|B) = P(AC)$, $P(BC|A) = P(BC)$
  - facile verificare queste relazioni utilizzando la definizione

Indipendenza tra n eventi

Indipendenza tra n eventi

Gli eventi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sono indipendenti se

$$P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i)$$

per ogni insieme $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ di indici diversi.

Indipendenza tra n eventi

Indipendenza tra n eventi

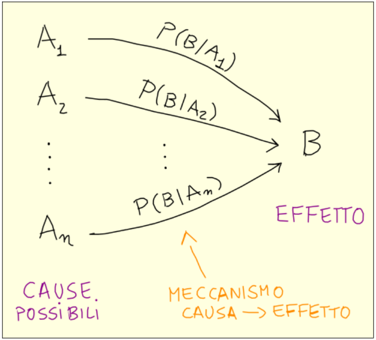
Gli eventi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sono indipendenti se

$$P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i)$$

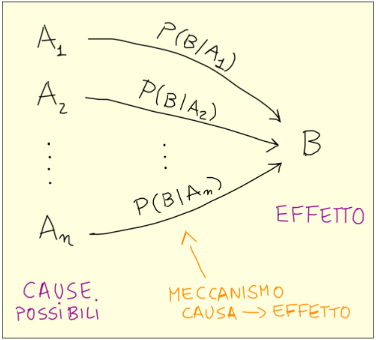
per ogni insieme $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ di indici diversi.

- In pratica deve essere possibile fattorizzare la probabilità di una *qualunque* intersezione di una sottoclasse di eventi distinti scelti tra gli $A_1, A_2, \ldots, A_n$

Teorema della probabilità totale

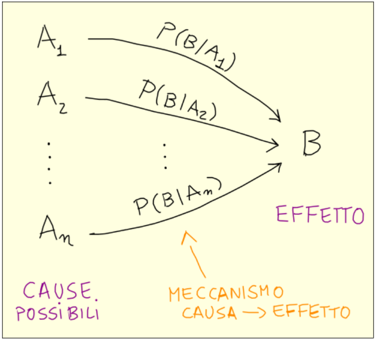


Teorema della probabilità totale



- Calcolare $P(B)$ note le probabilità *a priori* delle cause $P(A_i)$ e le probabilità condizionali $P(B|A_i)$

Teorema della probabilità totale



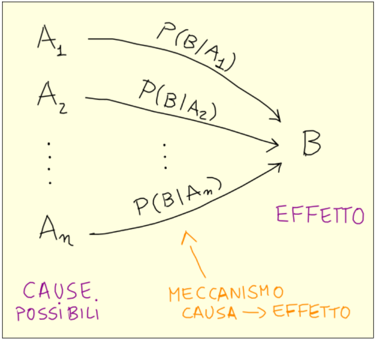
- Calcolare $P(B)$ note le probabilità *a priori* delle cause $P(A_i)$ e le probabilità condizionali $P(B|A_i)$

Teorema della probabilità totale

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventi mutuamente esclusivi $(A_j \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j)$, $B \subseteq \cup_{i=1}^{n} A_i$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)\, P(A_i)$$

Teorema della probabilità totale



- Calcolare $P(B)$ note le probabilità *a priori* delle cause $P(A_i)$ e le probabilità condizionali $P(B|A_i)$

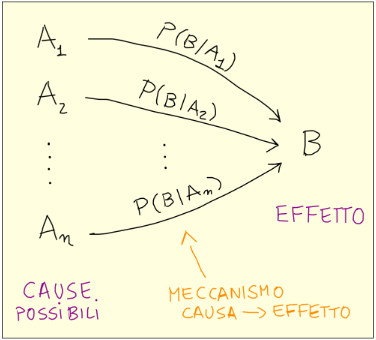
Teorema della probabilità totale

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventi mutuamente esclusivi $(A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j)$, $B \subseteq \cup_{i=1}^{n} A_i$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)\, P(A_i)$$

- Interpretazione "logica" delle ipotesi:
  - la cause sono mutuamente esclusive
  - se si verifica l'effetto, deve verificarsi una (ed una sola) tra le cause

Teorema della probabilità totale



- Calcolare $P(B)$ note le probabilità *a priori* delle cause $P(A_i)$ e le probabilità condizionali $P(B|A_i)$

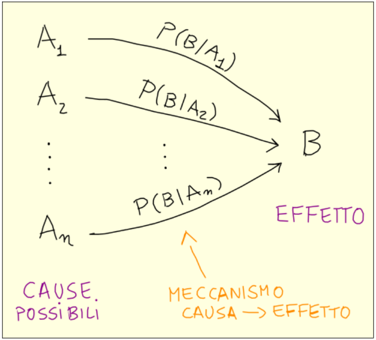
Teorema della probabilità totale

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventi mutuamente esclusivi $(A_j \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j)$, $B \subseteq \cup_{i=1}^{n} A_i$

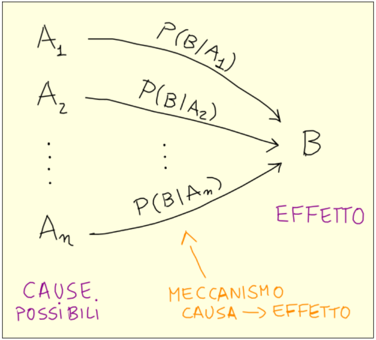
$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)\, P(A_i)$$

- Interpretazione "logica" delle ipotesi:
  - la cause sono mutuamente esclusive
  - se si verifica l'effetto, deve verificarsi una (ed una sola) tra le cause
- Può essere complicato verificare logicamente la condizione $B \subseteq \cup_{i=1}^{n} A_i$ $\Rightarrow$ più facile scegliere $\cup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ (partizione di Ω)

Teorema di Bayes

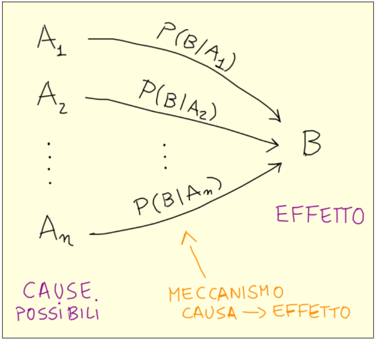


Teorema di Bayes



- Sapendo che si è verificato B (effetto), calcolare le probabilità *a posteriori* $P(A_i|B)$ (cause) $\Rightarrow$ **inferenza bayesiana**

Teorema di Bayes



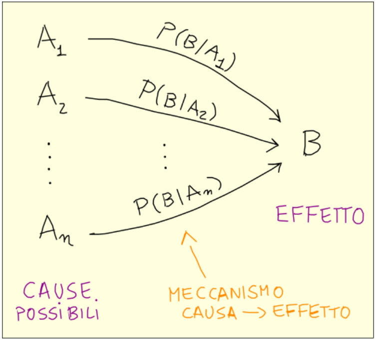
- Sapendo che si è verificato B (effetto), calcolare le probabilità *a posteriori* $P(A_i|B)$ (cause) $\Rightarrow$ **inferenza bayesiana**

Teorema di Bayes

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventi mutuamente esclusivi $(A_j \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j)$ e $B \subseteq \cup_{i=1}^{n} A_i$

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B|A_j)\,P(A_j)}$$

Teorema di Bayes



- Sapendo che si è verificato B (effetto), calcolare le probabilità *a posteriori* $P(A_i|B)$ (cause) $\Rightarrow$ **inferenza bayesiana**

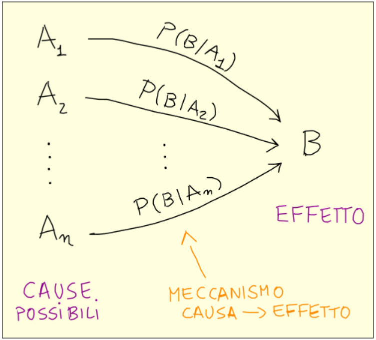
Teorema di Bayes

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventi mutuamente esclusivi $(A_j \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j)$ e $B \subseteq \cup_{i=1}^{n} A_i$

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B|A_j)\,P(A_j)}$$

- Stesse ipotesi del teorema della probabilità totale

Teorema di Bayes



- Sapendo che si è verificato B (effetto), calcolare le probabilità *a posteriori* $P(A_i|B)$ (cause) $\Rightarrow$ **inferenza bayesiana**

Teorema di Bayes

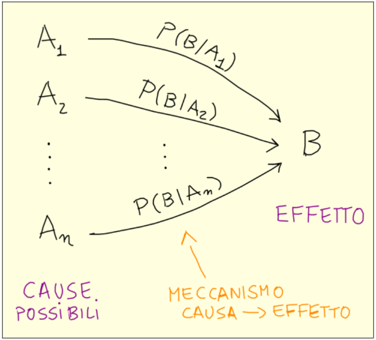
$A_1, A_2, \dots, A_n$ eventi mutuamente esclusivi ($A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$) e $B \subseteq \cup_{i=1}^{n} A_i$

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B|A_j)\,P(A_j)}$$

- Stesse ipotesi del teorema della probabilità totale
- In forma più semplice il teorema consente di legare $P(A_i|B)$ e $P(B|A_i)$ come

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)}$$

Teorema di Bayes



- Sapendo che si è verificato B (effetto), calcolare le probabilità *a posteriori* $P(A_i|B)$ (cause) $\Rightarrow$ **inferenza bayesiana**

Teorema di Bayes

$A_1, A_2, \dots, A_n$ eventi mutuamente esclusivi ($A_j \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$) e $B \subseteq \cup_{i=1}^n A_i$

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^n P(B|A_j)\,P(A_j)}$$

- Stesse ipotesi del teorema della probabilità totale
- In forma più semplice il teorema consente di legare $P(A_i|B)$ e $P(B|A_i)$ come

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)}$$

- *Esempio 2.5:* test malattia rara

Esercizio 2.5

- A e B giocano a dadi. A turno tirano due dadi (comincia A) e vince chi per primo ottiene un punteggio maggiore o uguale a 7. Determinare le rispettive probabilità di vittoria.
- Applicare il teorema della probabilità totale

Riferimenti

- G. Gelli, *Probabilità e informazione*, 2015 (capitolo 2)