Probabilità elementare

Corso di “Probabilità e Fenomeni Aleatori”
Laurea in Ingegneria Informatica, Biomedica e delle Telecomunicazioni

Donatella Darsena

Università di Napoli Parthenope

darsena@uniparthenope.it

a.a. 2020-21

Contenuti

- Introduzione al corso
- Introduzione alla probabilità
- Definizioni preliminari
- Assiomi di Kolmogorov
- Proprietà della probabilità
- Esempi di spazi di probabilità

Introduzione al corso

- Riferimenti docente:
  - Donatella Darsena, DI
  - Quinto piano, stanza 504
  - Tel: 081-5476741, E-mail: darsena@uniparthenope.it
  - Sito web: http://edi.uniparthenope.it/course/view.php?id=36
  - Orario di ricevimento: lunedì 15:00-17:00 (tramite piattaforma Teams)
  - Eventuali appuntamenti fuori orario: da concordare via e-mail
- Libri di testo:
  - G. Gelli, "Probabilità e informazione" disponibile sul sito web
  - Athanasios Papoulis, "Probability, Random Variables, and Stochastic Processes", ed. McGraw-Hill, third edition (in inglese).
  - Alberto Leon-Garcia, "Probability and Random Processes for Electrical Engineering", ed. Addison-Wesley, second edition (in inglese).

Modalità esame:
  - Scritto + orale
  - Non sono previste prove intracorso

Introduzione

- **Probabilità:** strumento matematico utile per lo studio dei *fenomeni aleatori* $\Rightarrow$ esperimenti il cui esito non è prevedibile, ma che presentano qualche forma di *regolarità*:

Introduzione

- **Probabilità:** strumento matematico utile per lo studio dei *fenomeni aleatori* $\Rightarrow$ esperimenti il cui esito non è prevedibile, ma che presentano qualche forma di *regolarità*:
  - giochi d'azzardo (lanci monete/dadi, alcuni giochi di carte, roulette, etc.)

Introduzione

- **Probabilità:** strumento matematico utile per lo studio dei *fenomeni aleatori* $\Rightarrow$ esperimenti il cui esito non è prevedibile, ma che presentano qualche forma di *regolarità*:
  - giochi d'azzardo (lanci monete/dadi, alcuni giochi di carte, roulette, etc.)
  - fenomeni fisici (moto delle particelle in un gas)

Introduzione

- **Probabilità:** strumento matematico utile per lo studio dei *fenomeni aleatori* $\Rightarrow$ esperimenti il cui esito non è prevedibile, ma che presentano qualche forma di *regolarità*:
  - giochi d'azzardo (lanci monete/dadi, alcuni giochi di carte, roulette, etc.)
  - fenomeni fisici (moto delle particelle in un gas)
  - teoria delle code (arrivo clienti ad uno sportello, arrivo pacchetti ad un router, etc.)

Introduzione

- **Probabilità:** strumento matematico utile per lo studio dei *fenomeni aleatori* $\Rightarrow$ esperimenti il cui esito non è prevedibile, ma che presentano qualche forma di *regolarità*:
  - giochi d'azzardo (lanci monete/dadi, alcuni giochi di carte, roulette, etc.)
  - fenomeni fisici (moto delle particelle in un gas)
  - teoria delle code (arrivo clienti ad uno sportello, arrivo pacchetti ad un router, etc.)
  - transazioni finanziarie (prezzo azioni)

Introduzione

- **Probabilità:** strumento matematico utile per lo studio dei *fenomeni aleatori* $\Rightarrow$ esperimenti il cui esito non è prevedibile, ma che presentano qualche forma di *regolarità*:
  - giochi d'azzardo (lanci monete/dadi, alcuni giochi di carte, roulette, etc.)
  - fenomeni fisici (moto delle particelle in un gas)
  - teoria delle code (arrivo clienti ad uno sportello, arrivo pacchetti ad un router, etc.)
  - transazioni finanziarie (prezzo azioni)
  - elaborazione/trasmissione informazione

Introduzione

- **Probabilità:** strumento matematico utile per lo studio dei *fenomeni aleatori* $\Rightarrow$ esperimenti il cui esito non è prevedibile, ma che presentano qualche forma di *regolarità*:
  - giochi d'azzardo (lanci monete/dadi, alcuni giochi di carte, roulette, etc.)
  - fenomeni fisici (moto delle particelle in un gas)
  - teoria delle code (arrivo clienti ad uno sportello, arrivo pacchetti ad un router, etc.)
  - transazioni finanziarie (prezzo azioni)
  - elaborazione/trasmissione informazione
- Conoscenze matematiche richieste:

Introduzione

- **Probabilità:** strumento matematico utile per lo studio dei *fenomeni aleatori* $\Rightarrow$ esperimenti il cui esito non è prevedibile, ma che presentano qualche forma di *regolarità*:
  - giochi d'azzardo (lanci monete/dadi, alcuni giochi di carte, roulette, etc.)
  - fenomeni fisici (moto delle particelle in un gas)
  - teoria delle code (arrivo clienti ad uno sportello, arrivo pacchetti ad un router, etc.)
  - transazioni finanziarie (prezzo azioni)
  - elaborazione/trasmissione informazione
- Conoscenze matematiche richieste:
  - teoria degli insiemi $\Rightarrow$ vedi richiami sul libro

Introduzione

- **Probabilità:** strumento matematico utile per lo studio dei *fenomeni aleatori* $\Rightarrow$ esperimenti il cui esito non è prevedibile, ma che presentano qualche forma di *regolarità*:
  - giochi d'azzardo (lanci monete/dadi, alcuni giochi di carte, roulette, etc.)
  - fenomeni fisici (moto delle particelle in un gas)
  - teoria delle code (arrivo clienti ad uno sportello, arrivo pacchetti ad un router, etc.)
  - transazioni finanziarie (prezzo azioni)
  - elaborazione/trasmissione informazione
- Conoscenze matematiche richieste:
  - teoria degli insiemi $\Rightarrow$ vedi richiami sul libro
  - operazioni fondamentali: unione ($\cup$), intersezione ($\cap$), complemento ($\overline{}$)

Introduzione

- **Probabilità:** strumento matematico utile per lo studio dei *fenomeni aleatori* $\Rightarrow$ esperimenti il cui esito non è prevedibile, ma che presentano qualche forma di *regolarità*:
  - giochi d'azzardo (lanci monete/dadi, alcuni giochi di carte, roulette, etc.)
  - fenomeni fisici (moto delle particelle in un gas)
  - teoria delle code (arrivo clienti ad uno sportello, arrivo pacchetti ad un router, etc.)
  - transazioni finanziarie (prezzo azioni)
  - elaborazione/trasmissione informazione
- Conoscenze matematiche richieste:
  - teoria degli insiemi $\Rightarrow$ vedi richiami sul libro
  - operazioni fondamentali: unione ($\cup$), intersezione ($\cap$), complemento ($\overline{\ }$)
  - integrazione/derivazione di funzioni di una/due variabili

Definizioni preliminari

- **Esperimento aleatorio:** procedura con un *ben definito* insieme di risultati, il cui esito non è prevedibile a priori:

Definizioni preliminari

- **Esperimento aleatorio:** procedura con un *ben definito* insieme di risultati, il cui esito non è prevedibile a priori:
  - *es.* lancio moneta/dado, estrazione di una carta da un mazzo, estrazioni del lotto, roulette etc.

Definizioni preliminari

- **Esperimento aleatorio:** procedura con un *ben definito* insieme di risultati, il cui esito non è prevedibile a priori:
  - *es.* lancio moneta/dado, estrazione di una carta da un mazzo, estrazioni del lotto, roulette etc.
  - indicheremo con ω il *risultato* di un esperimento aleatorio

Definizioni preliminari

- **Esperimento aleatorio:** procedura con un *ben definito* insieme di risultati, il cui esito non è prevedibile a priori:
  - *es.* lancio moneta/dado, estrazione di una carta da un mazzo, estrazioni del lotto, roulette etc.
  - indicheremo con ω il *risultato* di un esperimento aleatorio
- **Spazio campione:** insieme Ω contenente *tutti* i possibili risultati di un esperimento aleatorio:

Definizioni preliminari

- **Esperimento aleatorio:** procedura con un *ben definito* insieme di risultati, il cui esito non è prevedibile a priori:
  - *es.* lancio moneta/dado, estrazione di una carta da un mazzo, estrazioni del lotto, roulette etc.
  - indicheremo con ω il *risultato* di un esperimento aleatorio
- **Spazio campione:** insieme Ω contenente *tutti* i possibili risultati di un esperimento aleatorio:
  - *es.* lancio di una moneta $\Rightarrow \Omega = \{\mathsf{T}, \mathsf{C}\}$

Definizioni preliminari

- **Esperimento aleatorio:** procedura con un *ben definito* insieme di risultati, il cui esito non è prevedibile a priori:
  - *es.* lancio moneta/dado, estrazione di una carta da un mazzo, estrazioni del lotto, roulette etc.
  - indicheremo con ω il *risultato* di un esperimento aleatorio
- **Spazio campione:** insieme Ω contenente *tutti* i possibili risultati di un esperimento aleatorio:
  - *es.* lancio di una moneta $\Rightarrow$ $\Omega = \{\mathrm{T}, \mathrm{C}\}$
  - *es.* lancio di un dado $\Rightarrow$ $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Definizioni preliminari

- **Esperimento aleatorio:** procedura con un *ben definito* insieme di risultati, il cui esito non è prevedibile a priori:
  - *es.* lancio moneta/dado, estrazione di una carta da un mazzo, estrazioni del lotto, roulette etc.
  - indicheremo con ω il *risultato* di un esperimento aleatorio
- **Spazio campione:** insieme Ω contenente *tutti* i possibili risultati di un esperimento aleatorio:
  - *es.* lancio di una moneta $\Rightarrow \Omega = \{\mathrm{T}, \mathrm{C}\}$
  - *es.* lancio di un dado $\Rightarrow \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  - *es.* arrivo di un cliente ad uno sportello postale tra le 9:00 e le 12:00 $\Rightarrow \Omega = [0, 10800]$ (in secondi)

Definizioni preliminari

- **Esperimento aleatorio:** procedura con un *ben definito* insieme di risultati, il cui esito non è prevedibile a priori:
  - *es.* lancio moneta/dado, estrazione di una carta da un mazzo, estrazioni del lotto, roulette etc.
  - indicheremo con ω il *risultato* di un esperimento aleatorio
- **Spazio campione:** insieme Ω contenente *tutti* i possibili risultati di un esperimento aleatorio:
  - *es.* lancio di una moneta $\Rightarrow$ $\Omega = \{\mathrm{T}, \mathrm{C}\}$
  - *es.* lancio di un dado $\Rightarrow$ $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  - *es.* arrivo di un cliente ad uno sportello postale tra le 9:00 e le 12:00 $\Rightarrow$ $\Omega = [0, 10800]$ (in secondi)
- **Evento:** un qualunque sottoinsieme A di Ω $\Rightarrow$ $A \subseteq \Omega$
  - *es.* lancio di una moneta $\Rightarrow$ enumerare gli eventi (facile)

Definizioni preliminari

- **Esperimento aleatorio:** procedura con un *ben definito* insieme di risultati, il cui esito non è prevedibile a priori:
  - *es.* lancio moneta/dado, estrazione di una carta da un mazzo, estrazioni del lotto, roulette etc.
  - indicheremo con ω il *risultato* di un esperimento aleatorio
- **Spazio campione:** insieme Ω contenente *tutti* i possibili risultati di un esperimento aleatorio:
  - *es.* lancio di una moneta $\Rightarrow$ $\Omega = \{\mathrm{T}, \mathrm{C}\}$
  - *es.* lancio di un dado $\Rightarrow$ $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  - *es.* arrivo di un cliente ad uno sportello postale tra le 9:00 e le 12:00 $\Rightarrow$ $\Omega = [0, 10800]$ (in secondi)
- **Evento:** un qualunque sottoinsieme A di $\Omega \Rightarrow A \subseteq \Omega$
  - *es.* lancio di una moneta $\Rightarrow$ enumerare gli eventi (facile)
  - *es.* lancio di un dado $\Rightarrow$ enumerare gli eventi (medio)

Definizioni preliminari

- **Esperimento aleatorio:** procedura con un *ben definito* insieme di risultati, il cui esito non è prevedibile a priori:
  - *es.* lancio moneta/dado, estrazione di una carta da un mazzo, estrazioni del lotto, roulette etc.
  - indicheremo con ω il *risultato* di un esperimento aleatorio
- **Spazio campione:** insieme Ω contenente *tutti* i possibili risultati di un esperimento aleatorio:
  - *es.* lancio di una moneta $\Rightarrow$ $\Omega = \{\mathrm{T}, \mathrm{C}\}$
  - *es.* lancio di un dado $\Rightarrow$ $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  - *es.* arrivo di un cliente ad uno sportello postale tra le 9:00 e le 12:00 $\Rightarrow$ $\Omega = [0, 10800]$ (in secondi)
- **Evento:** un qualunque sottoinsieme A di Ω $\Rightarrow$ $A \subseteq \Omega$
  - *es.* lancio di una moneta $\Rightarrow$ enumerare gli eventi (facile)
  - *es.* lancio di un dado $\Rightarrow$ enumerare gli eventi (medio)
  - *es.* arrivo di un cliente ad uno sportello postale tra le 9:00 e le 12:00 $\Rightarrow$ enumerare gli eventi (più difficile)

Definizioni preliminari

- **Esperimento aleatorio:** procedura con un *ben definito* insieme di risultati, il cui esito non è prevedibile a priori:
  - *es.* lancio moneta/dado, estrazione di una carta da un mazzo, estrazioni del lotto, roulette etc.
  - indicheremo con ω il *risultato* di un esperimento aleatorio
- **Spazio campione:** insieme Ω contenente *tutti* i possibili risultati di un esperimento aleatorio:
  - *es.* lancio di una moneta $\Rightarrow$ $\Omega = \{\mathrm{T}, \mathrm{C}\}$
  - *es.* lancio di un dado $\Rightarrow$ $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  - *es.* arrivo di un cliente ad uno sportello postale tra le 9:00 e le 12:00 $\Rightarrow$ $\Omega = [0, 10800]$ (in secondi)
- **Evento:** un qualunque sottoinsieme A di $\Omega \Rightarrow A \subseteq \Omega$
  - *es.* lancio di una moneta $\Rightarrow$ enumerare gli eventi (facile)
  - *es.* lancio di un dado $\Rightarrow$ enumerare gli eventi (medio)
  - *es.* arrivo di un cliente ad uno sportello postale tra le 9:00 e le 12:00 $\Rightarrow$ enumerare gli eventi (più difficile)

Prova e significato degli eventi

- **Prova:** singola ripetizione di un esperimento $\Rightarrow$ restituisce un risultato $\omega \in \Omega$
- Terminologia:
  - si verifica l'evento $A \iff \omega \in A$

Prova e significato degli eventi

- **Prova:** singola ripetizione di un esperimento $\Rightarrow$ restituisce un risultato $\omega \in \Omega$
- Terminologia:
  - si verifica l'evento $A \iff \omega \in A$
  - non si verifica l'evento $A \iff \omega \notin A \iff \omega \in \overline{A}$

Prova e significato degli eventi

- **Prova:** singola ripetizione di un esperimento $\Rightarrow$ restituisce un risultato $\omega \in \Omega$
- Terminologia:
  - si verifica l'evento $A \iff \omega \in A$
  - non si verifica l'evento $A \iff \omega \notin A \iff \omega \in \overline{A}$
  - si verifica A o $B \iff \omega \in A \cup B \iff \omega \in A$ o $\omega \in B$

Prova e significato degli eventi

- **Prova:** singola ripetizione di un esperimento $\Rightarrow$ restituisce un risultato $\omega \in \Omega$
- Terminologia:
  - si verifica l'evento $A \iff \omega \in A$
  - non si verifica l'evento $A \iff \omega \notin A \iff \omega \in \overline{A}$
  - si verifica A o $B \iff \omega \in A \cup B \iff \omega \in A$ o $\omega \in B$
  - si verifica A e $B \iff \omega \in A \cap B \iff \omega \in A$ e $\omega \in B$

Prova e significato degli eventi

- **Prova:** singola ripetizione di un esperimento $\Rightarrow$ restituisce un risultato $\omega \in \Omega$
- Terminologia:
  - si verifica l'evento $A \iff \omega \in A$
  - non si verifica l'evento $A \iff \omega \notin A \iff \omega \in \overline{A}$
  - si verifica A o $B \iff \omega \in A \cup B \iff \omega \in A$ o $\omega \in B$
  - si verifica A e $B \iff \omega \in A \cap B \iff \omega \in A$ e $\omega \in B$
- Eventi particolari:
  - evento **certo** $A = \Omega \Rightarrow$ si verifica sempre

Prova e significato degli eventi

- **Prova:** singola ripetizione di un esperimento $\Rightarrow$ restituisce un risultato $\omega \in \Omega$
- Terminologia:
  - si verifica l'evento $A \iff \omega \in A$
  - non si verifica l'evento $A \iff \omega \notin A \iff \omega \in \overline{A}$
  - si verifica A o $B \iff \omega \in A \cup B \iff \omega \in A$ o $\omega \in B$
  - si verifica A e $B \iff \omega \in A \cap B \iff \omega \in A$ e $\omega \in B$
- Eventi particolari:
  - evento **certo** $A = \Omega \Rightarrow$ si verifica sempre
  - evento **impossibile** $A = \emptyset \Rightarrow$ non si verifica mai

Prova e significato degli eventi

- **Prova:** singola ripetizione di un esperimento $\Rightarrow$ restituisce un risultato $\omega \in \Omega$
- Terminologia:
  - si verifica l'evento $A \iff \omega \in A$
  - non si verifica l'evento $A \iff \omega \notin A \iff \omega \in \overline{A}$
  - si verifica A o $B \iff \omega \in A \cup B \iff \omega \in A$ o $\omega \in B$
  - si verifica A e $B \iff \omega \in A \cap B \iff \omega \in A$ e $\omega \in B$
- Eventi particolari:
  - evento **certo** $A = \Omega \Rightarrow$ si verifica sempre
  - evento **impossibile** $A = \emptyset \Rightarrow$ non si verifica mai
  - evento **elementare** $A = \{\omega\} \Rightarrow$ costituito da un singolo risultato

Prova e significato degli eventi

- **Prova:** singola ripetizione di un esperimento $\Rightarrow$ restituisce un risultato $\omega \in \Omega$
- Terminologia:
  - si verifica l'evento $A \iff \omega \in A$
  - non si verifica l'evento $A \iff \omega \notin A \iff \omega \in \overline{A}$
  - si verifica A o $B \iff \omega \in A \cup B \iff \omega \in A$ o $\omega \in B$
  - si verifica A e $B \iff \omega \in A \cap B \iff \omega \in A$ e $\omega \in B$
- Eventi particolari:
  - evento **certo** $A = \Omega \Rightarrow$ si verifica sempre
  - evento **impossibile** $A = \emptyset \Rightarrow$ non si verifica mai
  - evento **elementare** $A = \{\omega\} \Rightarrow$ costituito da un singolo risultato
  - eventi **mutuamente esclusivi** A e $B \iff A \cap B = \emptyset \iff$ non possono verificarsi contemporaneamente

Esempio

- *Esempio 1.4:* lancio di un dado, il risultato di una prova è $\omega = 4$, stabilire se si verificano i seguenti eventi:

Esempio

- *Esempio 1.4:* lancio di un dado, il risultato di una prova è $\omega = 4$, stabilire se si verificano i seguenti eventi:
    - $A = \{\text{pari}\}$

Esempio

- *Esempio 1.4:* lancio di un dado, il risultato di una prova è $\omega = 4$, stabilire se si verificano i seguenti eventi:
  - $A = \{\text{pari}\} \Rightarrow$ si verifica

Esempio

- *Esempio 1.4:* lancio di un dado, il risultato di una prova è $\omega = 4$, stabilire se si verificano i seguenti eventi:
  - $A = \{\text{pari}\} \Rightarrow$ si verifica
  - $B = \{\text{maggiore o uguale a 3}\}$

Esempio

- *Esempio 1.4:* lancio di un dado, il risultato di una prova è $\omega = 4$, stabilire se si verificano i seguenti eventi:
  - $A = \{\text{pari}\} \Rightarrow$ si verifica
  - $B = \{\text{maggiore o uguale a 3}\} \Rightarrow$ si verifica

Esempio

- *Esempio 1.4:* lancio di un dado, il risultato di una prova è $\omega = 4$, stabilire se si verificano i seguenti eventi:
  - $A = \{\text{pari}\} \Rightarrow$ si verifica
  - $B = \{\text{maggiore o uguale a 3}\} \Rightarrow$ si verifica
  - $C = \{\text{minore di 2}\}$

Esempio

- *Esempio 1.4:* lancio di un dado, il risultato di una prova è $\omega = 4$, stabilire se si verificano i seguenti eventi:
  - $A = \{\text{pari}\} \Rightarrow$ si verifica
  - $B = \{\text{maggiore o uguale a 3}\} \Rightarrow$ si verifica
  - $C = \{\text{minore di 2}\} \Rightarrow$ non si verifica

Esempio

- *Esempio 1.4:* lancio di un dado, il risultato di una prova è $\omega = 4$, stabilire se si verificano i seguenti eventi:
  - $A = \{\text{pari}\} \Rightarrow$ si verifica
  - $B = \{\text{maggiore o uguale a 3}\} \Rightarrow$ si verifica
  - $C = \{\text{minore di 2}\} \Rightarrow$ non si verifica
  - A e B

Esempio

- *Esempio 1.4:* lancio di un dado, il risultato di una prova è $\omega = 4$, stabilire se si verificano i seguenti eventi:
  - $A = \{\text{pari}\} \Rightarrow$ si verifica
  - $B = \{\text{maggiore o uguale a 3}\} \Rightarrow$ si verifica
  - $C = \{\text{minore di 2}\} \Rightarrow$ non si verifica
  - A e $B \Rightarrow$ si verifica

Esempio

- *Esempio 1.4:* lancio di un dado, il risultato di una prova è $\omega = 4$, stabilire se si verificano i seguenti eventi:
    - $A = \{\text{pari}\} \Rightarrow$ si verifica
    - $B = \{\text{maggiore o uguale a 3}\} \Rightarrow$ si verifica
    - $C = \{\text{minore di 2}\} \Rightarrow$ non si verifica
    - A e $B \Rightarrow$ si verifica
    - A o C

Esempio

- *Esempio 1.4:* lancio di un dado, il risultato di una prova è $\omega = 4$, stabilire se si verificano i seguenti eventi:
  - $A = \{\text{pari}\} \Rightarrow$ si verifica
  - $B = \{\text{maggiore o uguale a } 3\} \Rightarrow$ si verifica
  - $C = \{\text{minore di } 2\} \Rightarrow$ non si verifica
  - A e $B \Rightarrow$ si verifica
  - A o $C \Rightarrow$ si verifica

Esempio

- *Esempio 1.4:* lancio di un dado, il risultato di una prova è $\omega = 4$, stabilire se si verificano i seguenti eventi:
  - $A = \{\text{pari}\} \Rightarrow$ si verifica
  - $B = \{\text{maggiore o uguale a 3}\} \Rightarrow$ si verifica
  - $C = \{\text{minore di 2}\} \Rightarrow$ non si verifica
  - A e $B \Rightarrow$ si verifica
  - A o $C \Rightarrow$ si verifica
  - A e C

Esempio

- *Esempio 1.4:* lancio di un dado, il risultato di una prova è $\omega = 4$, stabilire se si verificano i seguenti eventi:
  - $A = \{\text{pari}\} \Rightarrow$ si verifica
  - $B = \{\text{maggiore o uguale a } 3\} \Rightarrow$ si verifica
  - $C = \{\text{minore di } 2\} \Rightarrow$ non si verifica
  - A e $B \Rightarrow$ si verifica
  - A o $C \Rightarrow$ si verifica
  - A e $C \Rightarrow$ non si verifica

Esempio

- *Esempio 1.4:* lancio di un dado, il risultato di una prova è $\omega = 4$, stabilire se si verificano i seguenti eventi:
  - $A = \{\text{pari}\} \Rightarrow$ si verifica
  - $B = \{\text{maggiore o uguale a 3}\} \Rightarrow$ si verifica
  - $C = \{\text{minore di 2}\} \Rightarrow$ non si verifica
  - A e $B \Rightarrow$ si verifica
  - A o $C \Rightarrow$ si verifica
  - A e $C \Rightarrow$ non si verifica

Spazio degli eventi e probabilità

- **Spazio degli eventi** $\mathcal{S} \Rightarrow$ una collezione di eventi contenente tutti gli eventi di interesse

Spazio degli eventi e probabilità

- **Spazio degli eventi** $\mathcal{S}$ $\Rightarrow$ una collezione di eventi contenente tutti gli eventi di interesse
    - possibile in molti casi considerare *tutti* i sottoinsiemi di A (compresi Ω ed $\emptyset$)

Spazio degli eventi e probabilità

- **Spazio degli eventi** $\mathcal{S} \Rightarrow$ una collezione di eventi contenente tutti gli eventi di interesse
  - possibile in molti casi considerare *tutti* i sottoinsiemi di A (compresi Ω ed $\emptyset$)
- **Probabilità:** legge che ad ogni evento (elemento di $\mathcal{S}$) associa un valore $P(A) \in [0, 1]$

Spazio degli eventi e probabilità

- **Spazio degli eventi** $\mathcal{S} \Rightarrow$ una collezione di eventi contenente tutti gli eventi di interesse
  - possibile in molti casi considerare *tutti* i sottoinsiemi di A (compresi Ω ed $\emptyset$)
- **Probabilità:** legge che ad ogni evento (elemento di $\mathcal{S}$) associa un valore $P(A) \in [0, 1]$

$$P : A \in \mathcal{S} \rightarrow P(A) \in [0, 1]$$

Spazio degli eventi e probabilità

- **Spazio degli eventi** $\mathcal{S}$ $\Rightarrow$ una collezione di eventi contenente tutti gli eventi di interesse
  - possibile in molti casi considerare *tutti* i sottoinsiemi di A (compresi Ω ed $\emptyset$)
- **Probabilità:** legge che ad ogni evento (elemento di $\mathcal{S}$) associa un valore $P(A) \in [0, 1]$

$$P : A \in \mathcal{S} \rightarrow P(A) \in [0, 1]$$

  - $P(A)$ misura il "grado di incertezza" associato al verificarsi dell'evento

Spazio degli eventi e probabilità

- **Spazio degli eventi** $\mathcal{S}$ $\Rightarrow$ una collezione di eventi contenente tutti gli eventi di interesse
  - possibile in molti casi considerare *tutti* i sottoinsiemi di A (compresi Ω ed $\emptyset$)
- **Probabilità:** legge che ad ogni evento (elemento di $\mathcal{S}$) associa un valore $P(A) \in [0, 1]$

$$P : A \in \mathcal{S} \rightarrow P(A) \in [0, 1]$$

  - $P(A)$ misura il "grado di incertezza" associato al verificarsi dell'evento
  - si tratta di una definizione "tautologica"?

Spazio degli eventi e probabilità

- **Spazio degli eventi** $\mathcal{S}$ $\Rightarrow$ una collezione di eventi contenente tutti gli eventi di interesse
    - possibile in molti casi considerare *tutti* i sottoinsiemi di A (compresi Ω ed $\emptyset$)
- **Probabilità:** legge che ad ogni evento (elemento di $\mathcal{S}$) associa un valore $P(A) \in [0, 1]$

$$P : A \in \mathcal{S} \to P(A) \in [0, 1]$$

    - $P(A)$ misura il "grado di incertezza" associato al verificarsi dell'evento
    - si tratta di una definizione "tautologica"?
- Dato un esperimento, è semplice definire Ω, gli eventi A e lo spazio degli eventi $\mathcal{S}$

Spazio degli eventi e probabilità

- **Spazio degli eventi** $\mathcal{S}$ $\Rightarrow$ una collezione di eventi contenente tutti gli eventi di interesse
  - possibile in molti casi considerare *tutti* i sottoinsiemi di A (compresi Ω ed $\emptyset$)
- **Probabilità:** legge che ad ogni evento (elemento di $\mathcal{S}$) associa un valore $P(A) \in [0, 1]$

$$P : A \in \mathcal{S} \rightarrow P(A) \in [0, 1]$$

  - $P(A)$ misura il "grado di incertezza" associato al verificarsi dell'evento
  - si tratta di una definizione "tautologica"?
- Dato un esperimento, è semplice definire Ω, gli eventi A e lo spazio degli eventi $\mathcal{S}$
- **Problema:** come assegnare la legge di probabilità?

Spazio degli eventi e probabilità

- **Spazio degli eventi** $\mathcal{S}$ $\Rightarrow$ una collezione di eventi contenente tutti gli eventi di interesse
    - possibile in molti casi considerare *tutti* i sottoinsiemi di A (compresi Ω ed $\emptyset$)
- **Probabilità:** legge che ad ogni evento (elemento di $\mathcal{S}$) associa un valore $P(A) \in [0, 1]$
$$P : A \in \mathcal{S} \to P(A) \in [0, 1]$$
    - $P(A)$ misura il "grado di incertezza" associato al verificarsi dell'evento
    - si tratta di una definizione "tautologica"?
- Dato un esperimento, è semplice definire Ω, gli eventi A e lo spazio degli eventi $\mathcal{S}$
- **Problema:** come assegnare la legge di probabilità?
- *Esempio 1.5:* lancio della moneta

Spazio degli eventi e probabilità

- **Spazio degli eventi** $\mathcal{S}$ $\Rightarrow$ una collezione di eventi contenente tutti gli eventi di interesse
    - possibile in molti casi considerare *tutti* i sottoinsiemi di A (compresi Ω ed $\emptyset$)
- **Probabilità:** legge che ad ogni evento (elemento di $\mathcal{S}$) associa un valore $P(A) \in [0,1]$

$$P : A \in \mathcal{S} \rightarrow P(A) \in [0,1]$$

-
    - $P(A)$ misura il "grado di incertezza" associato al verificarsi dell'evento
    - si tratta di una definizione "tautologica"?
- Dato un esperimento, è semplice definire Ω, gli eventi A e lo spazio degli eventi $\mathcal{S}$
- **Problema:** come assegnare la legge di probabilità?
- *Esempio 1.5:* lancio della moneta
    - difficile generalizzare al lancio di un dado (troppi eventi)

Assiomi di Kolmogorov

- Nel corso del tempo, i matematici hanno seguito varie strade per definire in maniera rigorosa il concetto di probabilità:

Assiomi di Kolmogorov

- Nel corso del tempo, i matematici hanno seguito varie strade per definire in maniera rigorosa il concetto di probabilità:
    - approccio frequentista, classico, soggettivista

Assiomi di Kolmogorov

- Nel corso del tempo, i matematici hanno seguito varie strade per definire in maniera rigorosa il concetto di probabilità:
  - approccio frequentista, classico, soggettivista
- L'approccio adoperato al giorno d'oggi è quello **assiomatico** (Kolmogorov, 1933) $\Rightarrow$

Assiomi di Kolmogorov

- Nel corso del tempo, i matematici hanno seguito varie strade per definire in maniera rigorosa il concetto di probabilità:
  - approccio frequentista, classico, soggettivista
- L'approccio adoperato al giorno d'oggi è quello **assiomatico** (Kolmogorov, 1933) $\Rightarrow$ una legge di probabilità $P(A)$ deve soddisfare a tre *assiomi* fondamentali

Assiomi di Kolmogorov

- Nel corso del tempo, i matematici hanno seguito varie strade per definire in maniera rigorosa il concetto di probabilità:
  - approccio frequentista, classico, soggettivista
- L'approccio adoperato al giorno d'oggi è quello **assiomatico** (Kolmogorov, 1933) $\Rightarrow$ una legge di probabilità $P(A)$ deve soddisfare a tre *assiomi* fondamentali
  - assioma = verità non dimostrabile

Assiomi di Kolmogorov

I. $P(A) \geq 0$ **(non negatività)**

Assiomi di Kolmogorov

- Nel corso del tempo, i matematici hanno seguito varie strade per definire in maniera rigorosa il concetto di probabilità:
  - approccio frequentista, classico, soggettivista
- L'approccio adoperato al giorno d'oggi è quello **assiomatico** (Kolmogorov, 1933) $\Rightarrow$ una legge di probabilità $P(A)$ deve soddisfare a tre *assiomi* fondamentali
  - assioma = verità non dimostrabile

Assiomi di Kolmogorov

I. $P(A) \geq 0$ **(non negatività)**

II. $P(\Omega) = 1$ **(normalizzazione)**

Assiomi di Kolmogorov

- Nel corso del tempo, i matematici hanno seguito varie strade per definire in maniera rigorosa il concetto di probabilità:
  - approccio frequentista, classico, soggettivista
- L'approccio adoperato al giorno d'oggi è quello **assiomatico** (Kolmogorov, 1933) $\Rightarrow$ una legge di probabilità $P(A)$ deve soddisfare a tre *assiomi* fondamentali
  - assioma = verità non dimostrabile

Assiomi di Kolmogorov

I. $P(A) \geq 0$ **(non negatività)**

II. $P(\Omega) = 1$ **(normalizzazione)**

III. $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ mutuamente esclusivi $(A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j)$

$$P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$ **(numerabile additività)**

- Ogni risultato della teoria della probabilità si ricava in maniera *deduttiva* a partire da tali assiomi

Probabilità come misura

- Una funzione $f(A)$ che soddisfa gli assiomi di Kolmogorov è una **misura**

Probabilità come misura

- Una funzione $f(A)$ che soddisfa gli assiomi di Kolmogorov è una **misura**
  - lunghezza, area, volume

Probabilità come misura

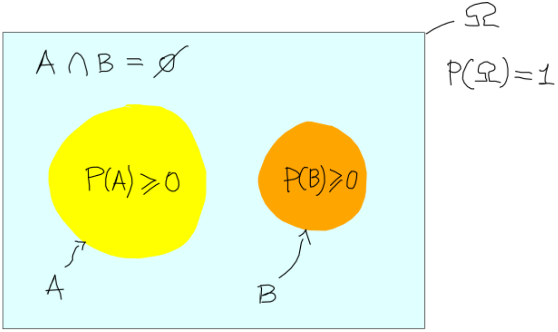
- Una funzione $f(A)$ che soddisfa gli assiomi di Kolmogorov è una **misura**
  - lunghezza, area, volume
  - misura *normalizzata* (per il secondo assioma)

Probabilità come misura

- Una funzione $f(A)$ che soddisfa gli assiomi di Kolmogorov è una **misura**
  - lunghezza, area, volume
  - misura *normalizzata* (per il secondo assioma)
- Molte relazioni della teoria della probabilità possono essere verificate sui diagrammi di Venn identificando $P(A)$ come l'area dell'insieme A

Probabilità come misura

- Una funzione $f(A)$ che soddisfa gli assiomi di Kolmogorov è una **misura**
  - lunghezza, area, volume
  - misura *normalizzata* (per il secondo assioma)
- Molte relazioni della teoria della probabilità possono essere verificate sui diagrammi di Venn identificando $P(A)$ come l'area dell'insieme A



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Proprietà elementari

- Le seguenti proprietà si provano facilmente utilizzando gli assiomi di Kolmogorov oppure aiutandosi con l'interpretazione grafica

Proprietà elementari della probabilità

1. $P(\emptyset) = 0$

Proprietà elementari

- Le seguenti proprietà si provano facilmente utilizzando gli assiomi di Kolmogorov oppure aiutandosi con l'interpretazione grafica

Proprietà elementari della probabilità

1. $P(\emptyset) = 0$
2. se $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ **(finita additività)**

Proprietà elementari

- Le seguenti proprietà si provano facilmente utilizzando gli assiomi di Kolmogorov oppure aiutandosi con l'interpretazione grafica

Proprietà elementari della probabilità

1. $P(\emptyset) = 0$
2. se $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ **(finita additività)**
3. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Proprietà elementari

- Le seguenti proprietà si provano facilmente utilizzando gli assiomi di Kolmogorov oppure aiutandosi con l'interpretazione grafica

Proprietà elementari della probabilità

1. $P(\emptyset) = 0$
2. se $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ **(finita additività)**
3. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$ **(disuguaglianza di Boole)**

Proprietà elementari

- Le seguenti proprietà si provano facilmente utilizzando gli assiomi di Kolmogorov oppure aiutandosi con l'interpretazione grafica

Proprietà elementari della probabilità

1. $P(\emptyset) = 0$
2. se $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ **(finita additività)**
3. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$ **(disuguaglianza di Boole)**
5. $B \subseteq A \Rightarrow P(B) \leq P(A)$

Proprietà elementari

- Le seguenti proprietà si provano facilmente utilizzando gli assiomi di Kolmogorov oppure aiutandosi con l'interpretazione grafica

Proprietà elementari della probabilità

1. $P(\emptyset) = 0$
2. se $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ **(finita additività)**
3. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$ **(disuguaglianza di Boole)**
5. $B \subseteq A \Rightarrow P(B) \leq P(A)$
6. $P(B) \leq 1$

Costruzione di una legge di probabilità

- *Esempio:* lancio di un dado

Costruzione di una legge di probabilità

- *Esempio:* lancio di un dado
  - sufficiente assegnare le probabilità solo agli *eventi elementari*
  - le probabilità di eventi non elementari si ottengono applicando il *terzo assioma*

Costruzione di una legge di probabilità

- *Esempio:* lancio di un dado
  - sufficiente assegnare le probabilità solo agli *eventi elementari*
  - le probabilità di eventi non elementari si ottengono applicando il *terzo assioma*
- **Limitazioni dell'approccio assiomatico:** gli assiomi di Kolmogorov non identificano *univocamente* la legge di probabilità

Costruzione di una legge di probabilità

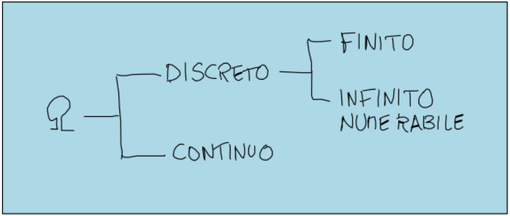
- *Esempio:* lancio di un dado
  - sufficiente assegnare le probabilità solo agli *eventi elementari*
  - le probabilità di eventi non elementari si ottengono applicando il *terzo assioma*
- **Limitazioni dell'approccio assiomatico:** gli assiomi di Kolmogorov non identificano *univocamente* la legge di probabilità
  - *es.* moneta bilanciata oppure truccata

Costruzione di una legge di probabilità

- *Esempio:* lancio di un dado
  - sufficiente assegnare le probabilità solo agli *eventi elementari*
  - le probabilità di eventi non elementari si ottengono applicando il *terzo assioma*
- **Limitazioni dell'approccio assiomatico:** gli assiomi di Kolmogorov non identificano *univocamente* la legge di probabilità
  - *es.* moneta bilanciata oppure truccata
- La costruzione di una legge di probabilità dipende dal tipo di spazio campione Ω:

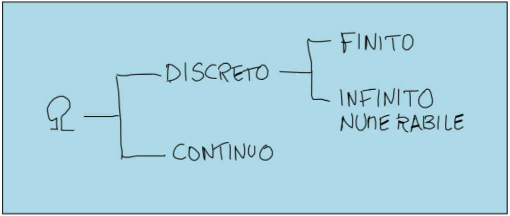
Costruzione di una legge di probabilità

- *Esempio:* lancio di un dado
  - sufficiente assegnare le probabilità solo agli *eventi elementari*
  - le probabilità di eventi non elementari si ottengono applicando il *terzo assioma*
- **Limitazioni dell'approccio assiomatico:** gli assiomi di Kolmogorov non identificano *univocamente* la legge di probabilità
  - *es.* moneta bilanciata oppure truccata
- La costruzione di una legge di probabilità dipende dal tipo di spazio campione Ω:



Costruzione di una legge di probabilità

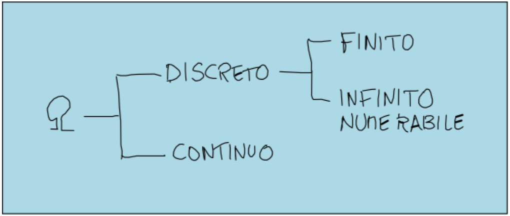
- *Esempio:* lancio di un dado
  - sufficiente assegnare le probabilità solo agli *eventi elementari*
  - le probabilità di eventi non elementari si ottengono applicando il *terzo assioma*
- **Limitazioni dell'approccio assiomatico:** gli assiomi di Kolmogorov non identificano *univocamente* la legge di probabilità
  - *es.* moneta bilanciata oppure truccata
- La costruzione di una legge di probabilità dipende dal tipo di spazio campione Ω:



  - *es.* $\Omega = \{T, C\}$ è un insieme *discreto* (finito)

Costruzione di una legge di probabilità

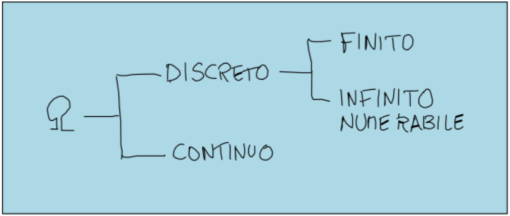
- *Esempio:* lancio di un dado
  - sufficiente assegnare le probabilità solo agli *eventi elementari*
  - le probabilità di eventi non elementari si ottengono applicando il *terzo assioma*
- **Limitazioni dell'approccio assiomatico:** gli assiomi di Kolmogorov non identificano *univocamente* la legge di probabilità
  - *es.* moneta bilanciata oppure truccata
- La costruzione di una legge di probabilità dipende dal tipo di spazio campione Ω:



  - *es.* $\Omega = \{T, C\}$ è un insieme *discreto* (finito)
  - *es.* $\Omega = \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots, \}$ (numeri naturali) è un insieme *discreto* (infinito numerabile)

Costruzione di una legge di probabilità

- *Esempio:* lancio di un dado
  - sufficiente assegnare le probabilità solo agli *eventi elementari*
  - le probabilità di eventi non elementari si ottengono applicando il *terzo assioma*
- **Limitazioni dell'approccio assiomatico:** gli assiomi di Kolmogorov non identificano *univocamente* la legge di probabilità
  - *es.* moneta bilanciata oppure truccata
- La costruzione di una legge di probabilità dipende dal tipo di spazio campione Ω:



  - *es.* $\Omega = \{\mathrm{T}, \mathrm{C}\}$ è un insieme *discreto* (finito)
  - *es.* $\Omega = \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots, \}$ (numeri naturali) è un insieme *discreto* (infinito numerabile)
  - *es.* $\Omega = \mathbb{R}$, $\Omega = [0, 1]$, $\Omega = [0, +\infty[$ sono insiemi *continui*

Spazi discreti

- Ω insieme discreto (finito/infinito) $\Rightarrow \Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots\}$

Spazi discreti

- Ω insieme discreto (finito/infinito) $\Rightarrow \Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots\}$
- Qualunque evento $A \subseteq \Omega$ esprimibile come unione *finita o numerabile* di *eventi elementari* $\{\omega_i\} \Rightarrow A = \bigcup_{i \in I_A} \{\omega_i\}$
  - I_A insieme degli indici degli elementi di A

Spazi discreti

- Ω insieme discreto (finito/infinito) $\Rightarrow \Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots\}$
- Qualunque evento $A \subseteq \Omega$ esprimibile come unione *finita o numerabile* di *eventi elementari* $\{\omega_i\} \Rightarrow A = \bigcup_{i \in I_A} \{\omega_i\}$
  - I_A insieme degli indici degli elementi di A
  - *es.* lancio di un dado $\Rightarrow A = \{\text{pari}\} = \{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}$

Spazi discreti

- Ω insieme discreto (finito/infinito) $\Rightarrow$ $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots\}$
- Qualunque evento $A \subseteq \Omega$ esprimibile come unione *finita o numerabile* di *eventi elementari* $\{\omega_i\}$ $\Rightarrow$ $A = \bigcup_{i \in I_A} \{\omega_i\}$
  - I_A insieme degli indici degli elementi di A
  - *es.* lancio di un dado $\Rightarrow$ $A = \{\text{pari}\} = \{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}$
- $\{\omega_i\} \cap \{\omega_j\} = \emptyset$ per $i \neq j$ (eventi elementari distinti sono mutuamente esclusivi) $\Rightarrow$ $P(A) = \sum_{i \in I_A} P(\{\omega_i\})$ (per il terzo assioma)

Spazi discreti

- Ω insieme discreto (finito/infinito) $\Rightarrow$ $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots\}$
- Qualunque evento $A \subseteq \Omega$ esprimibile come unione *finita o numerabile* di *eventi elementari* $\{\omega_i\}$ $\Rightarrow$ $A = \bigcup_{i \in I_A} \{\omega_i\}$
  - I_A insieme degli indici degli elementi di A
  - *es.* lancio di un dado $\Rightarrow$ $A = \{\text{pari}\} = \{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}$
- $\{\omega_i\} \cap \{\omega_j\} = \emptyset$ per $i \neq j$ (eventi elementari distinti sono mutuamente esclusivi) $\Rightarrow$ $P(A) = \sum_{i \in I_A} P(\{\omega_i\})$ (per il terzo assioma)
- **Risultato:** in uno spazio discreto per specificare completamente una legge di probabilità è sufficiente assegnare le probabilità $P(\{\omega_i\})$ degli eventi elementari:

Spazi discreti

- Ω insieme discreto (finito/infinito) $\Rightarrow$ $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots\}$
- Qualunque evento $A \subseteq \Omega$ esprimibile come unione *finita o numerabile* di *eventi elementari* $\{\omega_i\}$ $\Rightarrow$ $A = \bigcup_{i \in I_A} \{\omega_i\}$
  - I_A insieme degli indici degli elementi di A
  - *es.* lancio di un dado $\Rightarrow$ $A = \{\text{pari}\} = \{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}$
- $\{\omega_i\} \cap \{\omega_j\} = \emptyset$ per $i \neq j$ (eventi elementari distinti sono mutuamente esclusivi) $\Rightarrow$ $P(A) = \sum_{i \in I_A} P(\{\omega_i\})$ (per il terzo assioma)
- **Risultato:** in uno spazio discreto per specificare completamente una legge di probabilità è sufficiente assegnare le probabilità $P(\{\omega_i\})$ degli eventi elementari:
  - possibile scrivere $P(\omega_i)$ per semplicità

Spazi discreti

- Ω insieme discreto (finito/infinito) $\Rightarrow \Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots\}$
- Qualunque evento $A \subseteq \Omega$ esprimibile come unione *finita o numerabile* di *eventi elementari* $\{\omega_i\} \Rightarrow A = \bigcup_{i \in I_A} \{\omega_i\}$
  - I_A insieme degli indici degli elementi di A
  - *es.* lancio di un dado $\Rightarrow A = \{\text{pari}\} = \{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}$
- $\{\omega_i\} \cap \{\omega_j\} = \emptyset$ per $i \neq j$ (eventi elementari distinti sono mutuamente esclusivi) $\Rightarrow$ $P(A) = \sum_{i \in I_A} P(\{\omega_i\})$ (per il terzo assioma)
- **Risultato:** in uno spazio discreto per specificare completamente una legge di probabilità è sufficiente assegnare le probabilità $P(\{\omega_i\})$ degli eventi elementari:
  - possibile scrivere $P(\omega_i)$ per semplicità
  - la scelta delle probabilità degli eventi elementari non è univoca

Spazi discreti

- Ω insieme discreto (finito/infinito) $\Rightarrow$ $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots\}$
- Qualunque evento $A \subseteq \Omega$ esprimibile come unione *finita o numerabile* di *eventi elementari* $\{\omega_i\}$ $\Rightarrow$ $A = \bigcup_{i \in I_A} \{\omega_i\}$
  - I_A insieme degli indici degli elementi di A
  - *es.* lancio di un dado $\Rightarrow$ $A = \{\text{pari}\} = \{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}$
- $\{\omega_i\} \cap \{\omega_j\} = \emptyset$ per $i \neq j$ (eventi elementari distinti sono mutuamente esclusivi) $\Rightarrow$ $P(A) = \sum_{i \in I_A} P(\{\omega_i\})$ (per il terzo assioma)
- **Risultato:** in uno spazio discreto per specificare completamente una legge di probabilità è sufficiente assegnare le probabilità $P(\{\omega_i\})$ degli eventi elementari:
  - possibile scrivere $P(\omega_i)$ per semplicità
  - la scelta delle probabilità degli eventi elementari non è univoca
  - *es.* $\Omega = \{\mathrm{T}, \mathrm{C}\}$, due scelte possibili (tra ∞) sono $P(T) = P(C) = 1/2$ oppure $P(T) = 1/3$ e $P(C) = 2/3$

Spazi discreti

- Ω insieme discreto (finito/infinito) $\Rightarrow$ $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots\}$
- Qualunque evento $A \subseteq \Omega$ esprimibile come unione *finita o numerabile* di *eventi elementari* $\{\omega_i\}$ $\Rightarrow$ $A = \bigcup_{i \in I_A} \{\omega_i\}$
  - I_A insieme degli indici degli elementi di A
  - *es.* lancio di un dado $\Rightarrow$ $A = \{\text{pari}\} = \{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}$
- $\{\omega_i\} \cap \{\omega_j\} = \emptyset$ per $i \neq j$ (eventi elementari distinti sono mutuamente esclusivi) $\Rightarrow$ $P(A) = \sum_{i \in I_A} P(\{\omega_i\})$ (per il terzo assioma)
- **Risultato:** in uno spazio discreto per specificare completamente una legge di probabilità è sufficiente assegnare le probabilità $P(\{\omega_i\})$ degli eventi elementari:
  - possibile scrivere $P(\omega_i)$ per semplicità
  - la scelta delle probabilità degli eventi elementari non è univoca
  - *es.* $\Omega = \{\mathrm{T}, \mathrm{C}\}$, due scelte possibili (tra ∞) sono $P(T) = P(C) = 1/2$ oppure $P(T) = 1/3$ e $P(C) = 2/3$
  - qualunque scelta deve rispettare il secondo assioma $\Rightarrow$ somma delle probabilità degli eventi elementari pari ad 1

Spazi discreti finiti: equiprobabilità

- Ω finito con $N = \mathrm{card}(\Omega)$ elementi $\Rightarrow$ possibile scegliere le probabilità degli eventi elementari uguali tra loro $\Rightarrow$ $P(\omega_i) = p \in \mathbb{R}$ (costante) $\Rightarrow$ **equiprobabilità**

Spazi discreti finiti: equiprobabilità

- Ω finito con $N = \text{card}(\Omega)$ elementi $\Rightarrow$ possibile scegliere le probabilità degli eventi elementari uguali tra loro $\Rightarrow$ $P(\omega_i) = p \in \mathbb{R}$ (costante) $\Rightarrow$ **equiprobabilità**
- Applicando l'assioma di normalizzazione si ha necessariamente

$$\sum_{i=1}^{N} P(\omega_i) = 1 \quad \Longrightarrow \quad N\,p = 1 \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{1}{N} = \frac{1}{\text{card}(\Omega)}$$

Spazi discreti finiti: equiprobabilità

- Ω finito con $N = \text{card}(\Omega)$ elementi $\Rightarrow$ possibile scegliere le probabilità degli eventi elementari uguali tra loro $\Rightarrow$ $P(\omega_i) = p \in \mathbb{R}$ (costante) $\Rightarrow$ **equiprobabilità**
- Applicando l'assioma di normalizzazione si ha necessariamente

$$\sum_{i=1}^{N} P(\omega_i) = 1 \quad \Longrightarrow \quad N\,p = 1 \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{1}{N} = \frac{1}{\text{card}(\Omega)}$$

- Per un generico evento A si ha allora:

$$P(A) = \sum_{i \in I_A} P(\omega_i) = \text{card}(A) \times p = \quad \Longrightarrow \quad P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

Spazi discreti finiti: equiprobabilità

- Ω finito con $N = \text{card}(\Omega)$ elementi $\Rightarrow$ possibile scegliere le probabilità degli eventi elementari uguali tra loro $\Rightarrow$ $P(\omega_i) = p \in \mathbb{R}$ (costante) $\Rightarrow$ **equiprobabilità**
- Applicando l'assioma di normalizzazione si ha necessariamente

$$\sum_{i=1}^{N} P(\omega_i) = 1 \quad \Longrightarrow \quad N\,p = 1 \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{1}{N} = \frac{1}{\text{card}(\Omega)}$$

- Per un generico evento A si ha allora:

$$P(A) = \sum_{i \in I_A} P(\omega_i) = \text{card}(A) \times p = \quad \Longrightarrow \quad P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

  - calcolo delle probabilità si riduce ad un problema *combinatorio* o di "conteggio"
  - approccio proposto da Laplace (anche chiamato "approccio classico") $\Rightarrow$ probabilità come "rapporto tra casi favorevoli e casi totali"

Spazi discreti finiti: equiprobabilità

- Ω finito con $N = \text{card}(\Omega)$ elementi $\Rightarrow$ possibile scegliere le probabilità degli eventi elementari uguali tra loro $\Rightarrow$ $P(\omega_i) = p \in \mathbb{R}$ (costante) $\Rightarrow$ **equiprobabilità**
- Applicando l'assioma di normalizzazione si ha necessariamente

$$\sum_{i=1}^{N} P(\omega_i) = 1 \quad \Longrightarrow \quad N\,p = 1 \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{1}{N} = \frac{1}{\text{card}(\Omega)}$$

- Per un generico evento A si ha allora:

$$P(A) = \sum_{i \in I_A} P(\omega_i) = \text{card}(A) \times p = \quad \Longrightarrow \quad P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

  - calcolo delle probabilità si riduce ad un problema *combinatorio* o di "conteggio"
  - approccio proposto da Laplace (anche chiamato "approccio classico") $\Rightarrow$ probabilità come "rapporto tra casi favorevoli e casi totali"
  - soddisfacente per problemi con Ω finito ed eventi elementari equiprobabili
  - se non sono equiprobabili $\Rightarrow$ $P(A) \neq \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$ (limiti dell'approccio di Laplace)

Spazi discreti infiniti

- Ω insieme discreto con infiniti elementi $\Rightarrow$ non è possibile scegliere $P(\omega_i) = p$ (costante)

Spazi discreti infiniti

- Ω insieme discreto con infiniti elementi $\Rightarrow$ non è possibile scegliere $P(\omega_i) = p$ (costante)
    - in questo caso $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P(\omega_i) = \sum_{n=1}^{\infty} p = +\infty$ che <u>non</u> soddisfa il secondo assioma

Spazi discreti infiniti

- Ω insieme discreto con infiniti elementi $\Rightarrow$ non è possibile scegliere $P(\omega_i) = p$ (costante)
  - in questo caso $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P(\omega_i) = \sum_{n=1}^{\infty} p = +\infty$ che non soddisfa il secondo assioma
- In uno spazio discreto con infiniti elementi $\Rightarrow$ gli eventi elementari sono necessariamente **non equiprobabili**

Spazi discreti infiniti

- Ω insieme discreto con infiniti elementi $\Rightarrow$ non è possibile scegliere $P(\omega_i) = p$ (costante)
  - in questo caso $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P(\omega_i) = \sum_{n=1}^{\infty} p = +\infty$ che non soddisfa il secondo assioma
- In uno spazio discreto con infiniti elementi $\Rightarrow$ gli eventi elementari sono necessariamente **non equiprobabili**
- *Esempio:* pensa un numero intero a caso tra 1 e 10
  - $\Omega = \{1, 2, \dots, 10\}$
  - possibile scegliere una legge equiprobabile con $p = 1/10$

Spazi discreti infiniti

- Ω insieme discreto con infiniti elementi $\Rightarrow$ non è possibile scegliere $P(\omega_i) = p$ (costante)
  - in questo caso $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P(\omega_i) = \sum_{n=1}^{\infty} p = +\infty$ che non soddisfa il secondo assioma
- In uno spazio discreto con infiniti elementi $\Rightarrow$ gli eventi elementari sono necessariamente **non equiprobabili**
- *Esempio:* pensa un numero intero a caso tra 1 e 10
  - $\Omega = \{1, 2, \ldots, 10\}$
  - possibile scegliere una legge equiprobabile con $p = 1/10$
- *Esempio:* pensa un numero intero a caso tra tutti i numeri naturali
  - $\Omega = \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots, \}$
  - impossibile scegliere una legge equiprobabile

Spazi discreti infiniti

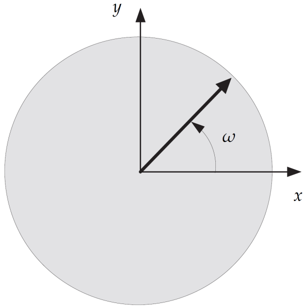
- Ω insieme discreto con infiniti elementi $\Rightarrow$ non è possibile scegliere $P(\omega_i) = p$ (costante)
  - in questo caso $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P(\omega_i) = \sum_{n=1}^{\infty} p = +\infty$ che non soddisfa il secondo assioma
- In uno spazio discreto con infiniti elementi $\Rightarrow$ gli eventi elementari sono necessariamente **non equiprobabili**
- *Esempio:* pensa un numero intero a caso tra 1 e 10
  - $\Omega = \{1, 2, \ldots, 10\}$
  - possibile scegliere una legge equiprobabile con $p = 1/10$
- *Esempio:* pensa un numero intero a caso tra tutti i numeri naturali
  - $\Omega = \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots, \}$
  - impossibile scegliere una legge equiprobabile
  - una possibile legge è $P(\omega_i) = p_i = \alpha p^i$ con $0 < p < 1$ (legge esponenziale)
  - determinare il valore di α

Spazi continui

- Ω insieme continuo $\Rightarrow$ cardinalità infinita *non numerabile*
  - *es.* $\Omega = \mathbb{R}$, $\Omega = [0, 1]$, $\Omega = [0, +\infty[$

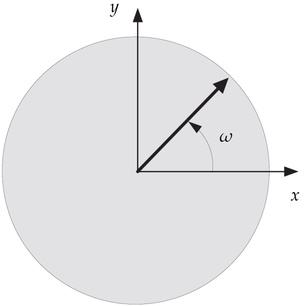
Spazi continui

- Ω insieme continuo $\Rightarrow$ cardinalità infinita *non numerabile*
  - *es.* $\Omega = \mathbb{R}$, $\Omega = [0, 1]$, $\Omega = [0, +\infty[$
- *Esempio 1.13:* lancetta ruotante
  - $\Omega = [0, 2\pi[$
  - $A_1 = [0, \pi/2]$ (si ferma nel primo quadrante)
  - $A_2 = [\pi, 2\pi]$ (si ferma nel terzo o nel quarto quadrante)
  - $A_3 = \{\pi/4\}$ (si ferma formando un angolo di 45^o rispetto all'asse x



Spazi continui

- Ω insieme continuo $\Rightarrow$ cardinalità infinita *non numerabile*
  - *es.* $\Omega = \mathbb{R}$, $\Omega = [0, 1]$, $\Omega = [0, +\infty[$
- *Esempio 1.13:* lancetta ruotante
  - $\Omega = [0, 2\pi[$
  - $A_1 = [0, \pi/2]$ (si ferma nel primo quadrante)
  - $A_2 = [\pi, 2\pi]$ (si ferma nel terzo o nel quarto quadrante)
  - $A_3 = \{\pi/4\}$ (si ferma formando un angolo di 45^o rispetto all'asse x
- Gli eventi (sottoinsiemi di Ω) *non* sono numerabili $\Rightarrow$ *non* è possibile applicare il terzo assioma a partire dalle probabilità degli eventi elementari



Spazi continui: legge di probabilità

- Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}$, la legge di probabilità si assegna definendo una funzione $f(x)$ su Ω che soddisfa due proprietà:

$$f(x) \geq 0 \qquad \int_{\Omega} f(x)\, dx = 1$$

Spazi continui: legge di probabilità

- Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}$, la legge di probabilità si assegna definendo una funzione $f(x)$ su Ω che soddisfa due proprietà:

$$f(x) \geq 0 \qquad \int_{\Omega} f(x)\, dx = 1$$

- Probabilità di un evento $\Rightarrow$ $P(A) \triangleq \int_{A} f(x)\, dx$

Spazi continui: legge di probabilità

- Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}$, la legge di probabilità si assegna definendo una funzione $f(x)$ su Ω che soddisfa due proprietà:

$$f(x) \geq 0 \qquad \int_{\Omega} f(x)\, dx = 1$$

- Probabilità di un evento $\Rightarrow$ $P(A) \stackrel{\triangle}{=} \int_{A} f(x)\, dx$
  - si può verificare che tale legge soddisfa gli assiomi di Kolmogorov

Spazi continui: legge di probabilità

- Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}$, la legge di probabilità si assegna definendo una funzione $f(x)$ su Ω che soddisfa due proprietà:

$$f(x) \geq 0 \qquad \int_{\Omega} f(x)\, dx = 1$$

- Probabilità di un evento $\Rightarrow$ $P(A) \triangleq \int_{A} f(x)\, dx$
  - si può verificare che tale legge soddisfa gli assiomi di Kolmogorov
  - facilmente generalizzabile al caso di $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ etc.

Spazi continui: legge di probabilità

- Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}$, la legge di probabilità si assegna definendo una funzione $f(x)$ su Ω che soddisfa due proprietà:

$$f(x) \geq 0 \qquad \int_{\Omega} f(x)\, dx = 1$$

- Probabilità di un evento $\Rightarrow$ $P(A) \triangleq \int_{A} f(x)\, dx$
    - si può verificare che tale legge soddisfa gli assiomi di Kolmogorov
    - facilmente generalizzabile al caso di $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ etc.
- La scelta della funzione $f(x)$ non è univoca

Spazi continui: legge di probabilità

- Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}$, la legge di probabilità si assegna definendo una funzione $f(x)$ su Ω che soddisfa due proprietà:

$$f(x) \geq 0 \qquad \int_{\Omega} f(x)\, dx = 1$$

- Probabilità di un evento $\Rightarrow P(A) \triangleq \int_{A} f(x)\, dx$
  - si può verificare che tale legge soddisfa gli assiomi di Kolmogorov
  - facilmente generalizzabile al caso di $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ etc.
- La scelta della funzione $f(x)$ non è univoca
  - problema analogo a quello della scelta delle probabilità degli eventi elementari in uno spazio discreto

Spazi continui: legge di probabilità

- Applicazione al caso della lancetta rotante $\Rightarrow$ possibile scegliere la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} & x \in [0, 2\pi[\\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Spazi continui: legge di probabilità

- Applicazione al caso della lancetta rotante $\Rightarrow$ possibile scegliere la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & x \in [0, 2\pi[\\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- In questo modo si ha

$$P(A) = \int_A \frac{1}{2\pi}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_A dx \quad \Longrightarrow \quad P(A) = \frac{\text{misura}(A)}{\text{misura}(\Omega)}$$

Spazi continui: legge di probabilità

- Applicazione al caso della lancetta rotante $\Rightarrow$ possibile scegliere la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} & x \in [0, 2\pi[\\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- In questo modo si ha

$$P(A) = \int_A \frac{1}{2\pi}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_A dx \quad \Longrightarrow \quad P(A) = \frac{\text{misura}(A)}{\text{misura}(\Omega)}$$

- Con questa scelta si trova:

$$P(A_1) = \frac{1}{4} \qquad P(A_2) = \frac{1}{2} \qquad P(A_3) = 0$$

Spazi continui: legge di probabilità

- Applicazione al caso della lancetta rotante $\Rightarrow$ possibile scegliere la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} & x \in [0, 2\pi[\\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- In questo modo si ha

$$P(A) = \int_A \frac{1}{2\pi}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_A dx \quad \Longrightarrow \quad P(A) = \frac{\text{misura}(A)}{\text{misura}(\Omega)}$$

- Con questa scelta si trova:

$$P(A_1) = \frac{1}{4} \qquad P(A_2) = \frac{1}{2} \qquad P(A_3) = 0$$

- Una conseguenza abbastanza sorprendente è che **gli eventi elementari hanno probabilità nulla**

Spazi continui: legge di probabilità

- **Legge uniforme:** (caso generale)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\text{misura}(\Omega)} & x \in \Omega \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- Applicabile se la misura di Ω è finita

Spazi continui: legge di probabilità

- **Legge uniforme:** (caso generale)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\text{misura}(\Omega)} & x \in \Omega \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- Applicabile se la misura di Ω è finita
- Se la misura di Ω è infinita necessario trovare funzioni più complicate

Spazi continui: legge di probabilità

- **Legge uniforme:** (caso generale)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\text{misura}(\Omega)} & x \in \Omega \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- Applicabile se la misura di Ω è finita
- Se la misura di Ω è infinita necessario trovare funzioni più complicate
- *Esempio:* arrivo pacchetti ad un router a partire da un certo istante
  - $\Omega = [0, +\infty[$

Spazi continui: legge di probabilità

- **Legge uniforme:** (caso generale)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\text{misura}(\Omega)} & x \in \Omega \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- Applicabile se la misura di Ω è finita
- Se la misura di Ω è infinita necessario trovare funzioni più complicate
- *Esempio:* arrivo pacchetti ad un router a partire da un certo istante
  - $\Omega = [0, +\infty[$
  - non è possibile scegliere una legge uniforme

Spazi continui: legge di probabilità

- **Legge uniforme:** (caso generale)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\text{misura}(\Omega)} & x \in \Omega \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- Applicabile se la misura di Ω è finita
- Se la misura di Ω è infinita necessario trovare funzioni più complicate
- *Esempio:* arrivo pacchetti ad un router a partire da un certo istante
  - $\Omega = [0, +\infty[$
  - non è possibile scegliere una legge uniforme
  - una possibile scelta è $f(x) = \alpha\, e^{-\lambda x} \mathrm{u}(x)$ (legge esponenziale)

Spazi continui: legge di probabilità

- **Legge uniforme:** (caso generale)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mathrm{misura}(\Omega)} & x \in \Omega \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- Applicabile se la misura di Ω è finita
- Se la misura di Ω è infinita necessario trovare funzioni più complicate
- *Esempio:* arrivo pacchetti ad un router a partire da un certo istante
  - $\Omega = [0, +\infty[$
  - non è possibile scegliere una legge uniforme
  - una possibile scelta è $f(x) = \alpha\, e^{-\lambda x} \mathrm{u}(x)$ (legge esponenziale)
  - determinare il valore di α in funzione di λ
- Il significato di $f(x)$ è quello di **densità di probabilità**:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P\{\omega \in (x, x + \Delta x)\}}{\Delta x}$$

Spazi continui: legge di probabilità

- **Legge uniforme:** (caso generale)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\text{misura}(\Omega)} & x \in \Omega \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- Applicabile se la misura di Ω è finita
- Se la misura di Ω è infinita necessario trovare funzioni più complicate
- *Esempio:* arrivo pacchetti ad un router a partire da un certo istante
  - $\Omega = [0, +\infty[$
  - non è possibile scegliere una legge uniforme
  - una possibile scelta è $f(x) = \alpha\, e^{-\lambda x}\mathrm{u}(x)$ (legge esponenziale)
  - determinare il valore di α in funzione di λ
- Il significato di $f(x)$ è quello di **densità di probabilità**:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P\{\omega \in (x, x + \Delta x)\}}{\Delta x}$$

  - se $f(x)$ è continua, si dimostra applicando il teorema della media del calcolo integrale
  - facilmente generalizzabile al caso $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ etc.

Riferimenti

- G. Gelli, *Probabilità e informazione*, 2015 (capitolo 1)