PFA

Prova scritta di Probabilità e Fenomeni Aleatori del 28.06.2018
Tempo: 2 ore. NON è consentito l'uso di libri ed appunti propri

ESERCIZIO 1 (10 punti)
Il cesto A contiene 3 mele integre e 2 mele marce, mentre il cesto B contiene 2 mele integre e 8 mele marce. Una moneta (non truccata) è lanciata per decidere da quale cesto estrarre una mela: se si verifica testa, si estrae una mela dal cesto A; se, invece, si verifica croce, si estrae una mela dal cesto B.

(a) Calcolare la probabilità di estrarre una mela integra.
(b) Sapendo che è stata estratta una mela integra, calcolare la probabilità che nel lancio della moneta si sia verificato testa.

ESERCIZIO 2 (10 punti)
Siano X e Y due variabili aleatorie caratterizzate dalla seguente pdf congiunta:

$$f_{XY}(x) = \begin{cases} \alpha\,|x|\,, & \forall x \in D \\ 0\,, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq x\}$ è un dominio di $\mathbb{R}^2$.

(a) Determinare il valore di α in modo che $f_{XY}(x, y)$ risulti essere una valida pdf.
(b) Stabilire se le variabili aleatorie X e Y sono indipendenti, ortogonali, incorrelate.
(c) Calcolare la probabilità $\mathrm{P}(X \geq 0, Y \geq 0)$.

ESERCIZIO 3 (10 punti)
Il processo aleatorio a tempo discreto $x(n)$ è posto in ingresso al sistema LTI caratterizzato dal seguente legame ingresso-uscita:

$$y(n) = x(n) + \beta\, x(n-1)$$

dove β è un parametro reale. Si assuma che $x(n)$ sia stazionario in senso lato, con media nulla e funzione di autocorrelazione

$$r_{xx}(m) = \sigma_x^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{|m|}.$$

(a) Calcolare la media μ_y del segnale di uscita $y(n)$.
(b) Calcolare la funzione di autocorrelazione $r_{yy}(m)$ del segnale di uscita $y(n)$.
(c) Calcolare la densità spettrale di potenza $S_{yy}(\nu)$ del segnale di uscita $y(n)$.
(d) Calcolare la potenza P_{yy} del segnale di uscita $y(n)$.