PFA

Prova scritta di Probabilità e Fenomeni Aleatori del 11.12.2017.
Tempo: 2 ore. NON è consentito l'uso di libri ed appunti propri.

Gli allievi che devono sostenere l'esame di TFA da 9 crediti svolgano gli esercizi **1, 2, 4**.
Gli allievi che devono sostenere l'esame di TFA da 6 crediti svolgano gli esercizi **1, 2, 3**. *Indicare sullo svolgimento, oltre a nome, cognome e numero di matricola, i seguenti codici:*
E9 *se si sostiene la prova da 9 crediti;* **E6** *se si sostiene la prova da 6 crediti.*

ESERCIZIO 1 (10 punti)

Un dado è truccato in modo che le facce 4 e 6 abbiano probabilità doppia delle altre quattro che sono equiprobabili. Calcolare la probabilità di ottenere:

(a) un numero dispari;

(b) un numero maggiore di tre.

ESERCIZIO 2 (10 punti)

Sia X una variabile aleatoria con pdf

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{per } x \leq -1; \\ 1, & \text{per } -1 < x < 0; \\ 0, & \text{per } x \geq 0. \end{cases}$$

Determinare:

(a) l'espressione della CDF di X:

(b) l'espressione della pdf di $Y = |X|$.

ESERCIZIO 3 (10 punti)

Siano X e Y due variabili aleatorie *indipendenti* uniformemente distribuite negli intervalli $(0, 1)$ e $(0, 1/10)$, rispettivamente, ossia $X \sim \mathrm{U}(0, 1)$ e $Y \sim \mathrm{U}(0, 1/10)$. Si consideri, in aggiunta, la terza variabile aleatoria $Z = X + Y$, risultante dalla somma delle due precedenti variabili aleatorie.

(a) Calcolare pdf $f_Z(z)$, media μ_Z e varianza σ_Z^2 della ¡variabile aleatoria Z.

(b) Stabilire se le due variabili aleatorie X e Z sono indipendenti, ortogonali e incorrelate, calcolando, in quest'ultimo caso, esplicitamente il coefficiente di correlazione ρ_{XZ}.

ESERCIZIO 4 (10 punti)

Un processo aleatorio $X(t)$ a media nulla e densità spettrale di potenza $N_0/2$ è posto in ingresso ad un filtro con funzione di trasferimento

$$H(f) = \frac{1}{1 + j\, 2\, \pi\, f} \, .$$

Detto $Y(t)$ il segnale di uscita, calcolare:

(a) $S_{YX}(f)$ e $R_{YX}(\tau)$;

(b) $S_Y(f)$ e $R_Y(\tau)$;

(c) la potenza media all'uscita del filtro.