

**Prova scritta di Probabilità e Fenomeni Aleatori del 23.10.2017.
Tempo: 2 ore. NON è consentito l'uso di libri ed appunti propri.**

Gli allievi che devono sostenere l'esame di PFA svolgano gli esercizi 1, 2, 4.

Gli allievi che devono sostenere l'esame di TFA da 6 crediti svolgano gli esercizi 1, 2, 3. Indicare sullo svolgimento, oltre a nome, cognome e numero di matricola, i seguenti codici:

E9 se si sostiene la prova da 9 crediti; **E6** se si sostiene la prova da 6 crediti.

ESERCIZIO 1 (10 punti)

Da un'urna contenente 4 palline bianche e 3 nere si eseguono due estrazioni con rimpiazzo, cioè la pallina estratta è subito rimessa nell'urna.

- a) Calcolare la probabilità che le due palline estratte siano del medesimo colore.
- b) Calcolare la probabilità che almeno una delle due palline estratte sia nera.

ESERCIZIO 2 (10 punti)

Siano X e Y due variabili aleatorie Gaussiane statisticamente indipendenti, a media nulla e varianza unitaria.

- a) Calcolare la pdf di $X - Y$.
- b) Calcolare la pdf della coppia di variabili aleatorie $(X, X - Y)$.
- c) Calcolare la pdf condizionale di X dato $X - Y = z$.
- d) Mostrare che $X + Y$ e $X - Y$ sono statisticamente indipendenti.

ESERCIZIO 3 (10 punti)

Una sorgente binaria discreta senza memoria (DMS) emette i simboli 0 ed 1, con probabilità $q = 0.3$ e $p = 0.7$, rispettivamente.

- a) Calcolare l'entropia dell'alfabeto di sorgente $H(X)$ (in bit) e l'entropia di sorgente $H(S)$ (in bit).
- b) Costruire un codice di Huffman per blocchi di tre simboli di sorgente, calcolarne la lunghezza media per simbolo di sorgente e l'efficienza di codifica.

ESERCIZIO 4 (10 punti)

Si consideri il segnale aleatorio

$$y(t) = [A + x(t)] \cos(2\pi f_0 t + \Theta),$$

dove $x(t)$ è un segnale aleatorio SSL, a media nulla e con funzione di autocorrelazione $r_x(\tau) = \sigma_x^2 \text{sinc}^2(\tau/T)$, con $T > 0$, f_0 è una costante deterministica, A è una variabile aleatoria non negativa con media finita e valore quadratico medio finito $\mathbb{E}(A^2)$, $\Theta \sim U(0, 2\pi)$ e infine, $x(t)$, A e Θ sono statisticamente indipendenti.

- (a) Calcolare la caratterizzazione sintetica di $y(t)$ e stabilire se è SSL.
- (b) Calcolare la potenza di $y(t)$.
- (c) Calcolare e rappresentare graficamente la PSD di $y(t)$ (assumere nel grafico $f_0 \gg \frac{1}{T}$).