PFA

Prova scritta di Probabilità e Fenomeni Aleatori del 20.6.2017.
Tempo: 2 ore. NON è consentito l'uso di libri ed appunti propri.

Gli allievi che devono sostenere l'esame di PFA svolgano gli esercizi **1, 2, 4**.
Gli allievi che devono sostenere l'esame di TFA da 6 crediti svolgano gli esercizi **1, 2, 3**. *Indicare sullo svolgimento, oltre a nome, cognome e numero di matricola, i seguenti codici:*
E9 *se si sostiene la prova da 9 crediti;* **E6** *se si sostiene la prova da 6 crediti.*

ESERCIZIO 1 (10 punti)

Si consideri il seguente esperimento aleatorio: due dadi bilanciati sono lanciati separatamente più volte. Sia X la v.a. che modella il numero di lanci necessario ad ottenere 1 oppure 2 con il primo dado e Y la v.a. che modella il numero di lanci necessario ad ottenere 6 con il secondo dado. Calcolare:

(a) la distribuzione di X e Y;

(b) $\mathbb{E}[X]$ e $\mathbb{E}[Y]$;

(c) la distribuzione di $Z \triangleq \max(X, Y)$;

(d) $\mathbb{E}[Z]$.

ESERCIZIO 2 (10 punti)

Sia X una variabile aleatoria caratterizzata dalla seguente pdf:

$$f_X(x) = \frac{k_1}{2}\,(1-x)\,\mathrm{rect}\left(\frac{x}{2}\right) + k_2\,\delta(x-1)\,.$$

(a) Sapendo che $\mathrm{E}(X) = \frac{1}{2}$, determinare i valori di k_1 e k_2 affinché $f_X(x)$ sia una valida pdf e rappresentarla graficamente.

(b) Calcolare la CDF di X e rappresentarla graficamente.

(c) Calcolare $\mathrm{P}(X=0)$, $\mathrm{P}(X=1)$, $\mathrm{P}(|X|>1)$, $\mathrm{P}(|X|\le 1)$, $\mathrm{P}(\frac{1}{2} < |X| < 1)$.

[Esprimere tutti i risultati intermedi e finali in forma frazionaria.]

ESERCIZIO 3 (10 punti)

Una sorgente binaria discreta senza memoria (DMS) emette i simboli 0 ed 1, con probabilità $q = 0.3$ e $p = 0.7$, rispettivamente.

a) Calcolare l'entropia dell'alfabeto di sorgente $H(X)$ (in bit) e l'entropia di sorgente $H(\mathcal{S})$ (in bit).

b) Costruire un codice di Huffman per blocchi di tre simboli di sorgente, calcolarne la lunghezza media per simbolo di sorgente e l'efficienza di codifica.

ESERCIZIO 4 (10 punti)

Siano $x(t)$ e $n(t)$ due segnali aleatori WSS indipendenti con media μ_x e μ_n, rispettivamente, e funzione di autocorrelazione statistica $r_x(\tau)$ e $r_n(\tau)$. Il segnale $x(t)$ è posto in ingresso al sistema LTI il cui legame i-u è il seguente:

$$z(t) = x(t) - x(t-T)\,.$$

Calcolare la caratterizzazione sintetica del segnale $y(t) = z(t) + n(t)$.