

PFA

Prova scritta di Probabilità e Fenomeni Aleatori del 7.12.2016.

Tempo: 2 ore. NON è consentito l'uso di libri ed appunti propri.

Gli allievi che devono sostenere l'esame di PFA svolgano gli esercizi 1, 2, 4.

Gli allievi che devono sostenere l'esame di TFA da 6 crediti svolgano gli esercizi 1, 2, 3. Indicare sullo svolgimento, oltre a nome, cognome e numero di matricola, i seguenti codici:

E9 se si sostiene la prova da 9 crediti; **E6** se si sostiene la prova da 6 crediti.

ESERCIZIO 1 (10 punti)

Siano X e Y due variabili aleatorie discrete che assumono valori $X \in \{0, 1\}$ e $Y \in \{1, 2\}$. La funzione di distribuzione di probabilità congiunta di X e Y è data da

$$\begin{aligned}P(X = 0, Y = 1) &= \alpha \\P(X = 0, Y = 2) &= 1 - 4\alpha \\P(X = 1, Y = 1) &= \alpha \\P(X = 1, Y = 2) &= 2\alpha\end{aligned}$$

con $\alpha > 0$.

- Determinare l'insieme dei valori ammissibili del parametro α .
- Verificare se per $\alpha = 1/6$ le variabili aleatorie X ed Y sono indipendenti.

ESERCIZIO 2 (10 punti)

Sia X una variabile aleatoria caratterizzata dalla seguente pdf:

$$f_X(x) = \frac{k_1}{2}(1-x)\text{rect}\left(\frac{x}{2}\right) + k_2\delta(x-1).$$

- Sapendo che $E(X) = \frac{1}{2}$, determinare i valori di k_1 e k_2 affinché $f_X(x)$ sia una valida pdf e rappresentarla graficamente.
- Calcolare la CDF di X e rappresentarla graficamente.
- Calcolare $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, $P(|X| > 1)$, $P(|X| \leq 1)$, $P(\frac{1}{2} < |X| < 1)$.

[Esprimere tutti i risultati intermedi e finali in forma frazionaria.]

ESERCIZIO 3 (10 punti)

Determinare la pdf di $Z = X/Y$ dove X e Y sono vv.aa. i.i.d. $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

ESERCIZIO 4 (10 punti)

Siano $x(n)$ ed $y(n)$ due processi aleatori SSL, statisticamente indipendenti tra loro. I processi $x(n)$ ed $y(n)$ hanno media nulla e funzioni di autocorrelazione $r_x(m)$ ed $r_y(m)$, rispettivamente. Si consideri il processo aleatorio $z(n) = x(n) + y(n)x(n-1)$.

- Determinare la caratterizzazione statistica *sintetica* del processo $z(n)$ e stabilire se esso è SSL.
- Determinare l'espressione della densità spettrale di potenza (PSD) di $z(n)$ in funzione delle PSD di $x(n)$ e di $y(n)$.