PFA

Prova scritta di Probabilità e Fenomeni Aleatori del 25.07.2016
Tempo: 2 ore. NON è consentito l'uso di libri ed appunti propri

Gli allievi che devono sostenere l'esame di PFA o TFA (9 CFU) svolgano gli esercizi **1, 2, 4**.
Gli allievi che devono sostenere l'esame di TFA (6 CFU) svolgano gli esercizi **1, 2, 3**.
Indicare sullo svolgimento, oltre a nome, cognome e numero di matricola, i seguenti codici:

- **PFA** *se si sostiene la prova di Probabilità e Fenomeni Aleatori;*
- **TFA-9** *se si sostiene la prova di Teoria e Fenomeni Aleatori da 9 CFU;*
- **TFA-6** *se si sostiene la prova di Teoria e Fenomeni Aleatori da 6 CFU.*

ESERCIZIO 1 (10 punti)

La funzione di distribuzione di probabilità (DF) congiunta della coppia di variabili aleatorie X e Y è data da

$$p_{XY}(1,1) = \frac{1}{8};\ p_{XY}(1,2) = \frac{1}{4};\ p_{XY}(2,1) = \frac{1}{8};\ p_{XY}(2,2) = \frac{1}{2}\,.$$

(a) Determinare la DF condizionale di X dato $Y = i$, $i = 1, 2$.

(b) Sono X e Y statisticamente indipendenti?

(c) Calcolare $\mathrm{P}(XY \leq 3)$, $\mathrm{P}(X + Y > 2)$ e $\mathrm{P}(X/Y > 1)$.

ESERCIZIO 2 (10 punti)

Siano X e Y due variabili aleatorie continue aventi la seguente pdf congiunta:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} kxy, & 0 < x < 1 \text{ e } x < y < 2x \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Calcolare:

a) il valore della costante k;

b) le pdf marginali delle variabili aleatorie X e Y;

c) la covarianza di X e Y.

ESERCIZIO 3 (10 punti)

Una sorgente binaria discreta senza memoria (DMS) emette i simboli 0 ed 1, con probabilità $q = 0.3$ e $p = 0.7$, rispettivamente.

a) Calcolare l'entropia dell'alfabeto di sorgente $H(X)$ (in bit) e l'entropia di sorgente $H(\mathcal{S})$ (in bit).

b) Costruire un codice di Shannon per blocchi di tre simboli di sorgente, calcolarne la lunghezza media per simbolo di sorgente e l'efficienza di codifica.

c) Costruire un codice di Huffman per blocchi di tre simboli di sorgente, calcolarne la lunghezza media per simbolo di sorgente e l'efficienza di codifica.

ESERCIZIO 4 (10 punti)

Sia a_n una sequenza di variabili aleatorie statisticamente indipendenti, ciascuna delle quali assume i valori ± 1 con probabilità $\mathrm{P}(+1) = \frac{1}{3}$ e $\mathrm{P}(-1) = \frac{2}{3}$, e sia $b_n \triangleq a_n + a_{n-1}$. Si consideri il segnale PAM $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n\, p(t - n\,T)$, dove $p(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T} - 0.5\right)$. Calcolare la densità spettrale di potenza (PSD) del segnale $x(t)$.