

# PFA

## Prova scritta di Probabilità e Fenomeni Aleatori del 20.06.2016 Tempo: 2 ore. NON è consentito l'uso di libri ed appunti propri

Gli allievi che devono sostenere l'esame di PFA o TFA (9 CFU) svolgano gli esercizi **1, 2, 4**.

Gli allievi che devono sostenere l'esame di TFA (6 CFU) svolgano gli esercizi **1, 2, 3**.

Indicare sullo svolgimento, oltre a nome, cognome e numero di matricola, i seguenti codici:

- **PFA** se si sostiene la prova di Probabilità e Fenomeni Aleatori;
- **TFA-9** se si sostiene la prova di Teoria e Fenomeni Aleatori da 9 CFU;
- **TFA-6** se si sostiene la prova di Teoria e Fenomeni Aleatori da 6 CFU.

### ESERCIZIO 1 (10 punti)

Un'urna contiene sei palline rosse e quattro nere. Si estraggono due palline. Calcolare la probabilità che siano

- di colore diverso,
- dello stesso colore,
- almeno una nera,

sia nell'ipotesi che la prima pallina estratta venga rimessa nell'urna sia nell'ipotesi che non venga rimessa nell'urna.

### ESERCIZIO 2 (10 punti)

Si consideri la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ k(3x - x^2), & 0 \leq x \leq 3; \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

Calcolare

- il valore di  $k$  affinché la funzione  $f(x)$  rappresenti la pdf della variabile aleatoria  $X$ ;
- la CDF di  $X$ ;
- la media e la varianza di  $X$ ;
- $P(X \in (1, 2))$ .

### ESERCIZIO 3 (10 punti)

Una sorgente binaria discreta senza memoria (DMS) emette i simboli 0 ed 1, con probabilità  $q = 0.3$  e  $p = 0.7$ , rispettivamente.

- Calcolare l'entropia dell'alfabeto di sorgente  $H(X)$  (in bit) e l'entropia di sorgente  $H(S)$  (in bit).
- Costruire un codice di Shannon per blocchi di tre simboli di sorgente, calcolarne la lunghezza media per simbolo di sorgente e l'efficienza di codifica.
- Costruire un codice di Huffman per blocchi di tre simboli di sorgente, calcolarne la lunghezza media per simbolo di sorgente e l'efficienza di codifica.

### ESERCIZIO 4 (10 punti)

Sia  $y(t) = x(t) + w(t)$  un segnale posto in ingresso ad un filtro passabanda, avente risposta in frequenza  $H(f) = \text{rect}\left(\frac{f+f_c}{W}\right) + \text{rect}\left(\frac{f-f_c}{W}\right)$ , dove  $x(t)$  è la componente di segnale utile ed è pari a  $x(t) = a \cos(2\pi f_c t + \Theta)$ . Si assuma che  $\Theta$  sia una variabile aleatoria uniformemente distribuita nell'intervallo  $(0, 2\pi)$ ,  $w(t)$  sia un processo aleatorio di rumore stazionario in senso lato (WSS), a media nulla e densità spettrale di potenza  $\frac{N_0}{2}$ , statisticamente indipendente da  $\Theta$ , e  $a$  una costante. Calcolare il rapporto tra la potenza di segnale utile e quella di rumore all'uscita del filtro.