

PFA

Prova scritta di Probabilità e Fenomeni Aleatori del 10.12.2015 Tempo: 2 ore. NON è consentito l'uso di libri ed appunti propri

Gli allievi che devono sostenere l'esame di PFA o TFA (9 CFU) svolgano gli esercizi 1, 2, 4.

Gli allievi che devono sostenere l'esame di TFA (6 CFU) svolgano gli esercizi 1, 2, 3.

Indicare sullo svolgimento, oltre a nome, cognome e numero di matricola, i seguenti codici:

- **PFA** se si sostiene la prova di Probabilità e Fenomeni Aleatori;
- **TFA-9** se si sostiene la prova di Teoria e Fenomeni Aleatori da 9 CFU;
- **TFA-6** se si sostiene la prova di Teoria e Fenomeni Aleatori da 6 CFU.

ESERCIZIO 1 (10 punti)

In un'urna vi sono n palline nere ed una bianca. Si estraggono due palline. Calcolare:

- la probabilità che siano entrambe nere;
- per quale valore di n tale probabilità vale 0.9.

ESERCIZIO 2 (10 punti)

Una v.a. X ha pdf

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ a(3x - x^2), & \text{se } 0 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{if } x > 3. \end{cases}$$

- Determinare a in modo che $f_X(x)$ sia una valida pdf e disegnarne il grafico.
- Determinare CDF, media e varianza di X .
- Calcolare $P(X \in (1, 2))$.

ESERCIZIO 3 (10 punti)

Siano X e Y due variabili aleatorie *congiuntamente Gaussiane*, con medie $\mu_X = \mu_Y = 1$, deviazioni standard $\sigma_X = 1$, $\sigma_Y = 2$, e coefficiente di correlazione $\rho = 0.5$. Determinare la pdf della variabile aleatoria $Z = 2X + 3Y$.

ESERCIZIO 4 (10 punti)

Si consideri il segnale aleatorio

$$x(t) = x_c(t) \cos(2\pi f_c t + \Theta) - x_s(t) \sin(2\pi f_c t + \Theta),$$

dove $f_c \gg W > 0$ è la frequenza portante del segnale, $x_c(t)$ e $x_s(t)$ sono processi aleatori congiuntamente WSS, con funzioni di autocorrelazione $R_{x_c x_c}(\tau) = R_{x_s x_s}(\tau) = \text{sinc}(2W\tau)$ e funzione di mutua correlazione $R_{x_c x_s}(\tau) \equiv 0$, e Θ è una variabile aleatoria uniforme in $(0, 2\pi)$, indipendente da $x_c(t)$ e $x_s(t)$.

- Calcolare la funzione di autocorrelazione $R_{xx}(\tau)$ e la densità spettrale di potenza (PSD) di $x(t)$.
- Nell'ipotesi in cui il segnale aleatorio $x(t)$ sia moltiplicato per $2 \cos(2\pi f_c t + \Theta)$ ed il segnale risultante $y(t) = 2x(t) \cos(2\pi f_c t + \Theta)$ sia filtrato mediante un filtro passabasso ideale con guadagno in continua unitario e banda monolaterale W , calcolare l'uscita $z(t)$ del filtro passabasso.