

# PFA

## Prova scritta di Probabilità e Fenomeni Aleatori del 10.12.2015 Tempo: 2 ore. NON è consentito l'uso di libri ed appunti propri

Gli allievi che devono sostenere l'esame di PFA o TFA (9 CFU) svolgano gli esercizi 1, 2, 4.

Gli allievi che devono sostenere l'esame di TFA (6 CFU) svolgano gli esercizi 1, 2, 3.

Indicare sullo svolgimento, oltre a nome, cognome e numero di matricola, i seguenti codici:

- **PFA** se si sostiene la prova di Probabilità e Fenomeni Aleatori;
- **TFA-9** se si sostiene la prova di Teoria e Fenomeni Aleatori da 9 CFU;
- **TFA-6** se si sostiene la prova di Teoria e Fenomeni Aleatori da 6 CFU.

### ESERCIZIO 1 (10 punti)

In un'urna vi sono  $n$  palline nere ed una bianca. Si estraggono due palline. Calcolare:

- la probabilità che siano entrambe nere;
- per quale valore di  $n$  tale probabilità vale 0.9.

### ESERCIZIO 2 (10 punti)

Una v.a.  $X$  ha pdf

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ a(3x - x^2), & \text{se } 0 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{if } x > 3. \end{cases}$$

- Determinare  $a$  in modo che  $f_X(x)$  sia una valida pdf e disegnarne il grafico.
- Determinare CDF, media e varianza di  $X$ .
- Calcolare  $P(X \in (1, 2))$ .

### ESERCIZIO 3 (10 punti)

Siano  $X$  e  $Y$  due variabili aleatorie *congiuntamente Gaussiane*, con medie  $\mu_X = \mu_Y = 1$ , deviazioni standard  $\sigma_X = 1$ ,  $\sigma_Y = 2$ , e coefficiente di correlazione  $\rho = 0.5$ . Determinare la pdf della variabile aleatoria  $Z = 2X + 3Y$ .

### ESERCIZIO 4 (10 punti)

Si consideri il segnale aleatorio

$$x(t) = x_c(t) \cos(2\pi f_c t + \Theta) - x_s(t) \sin(2\pi f_c t + \Theta),$$

dove  $f_c \gg W > 0$  è la frequenza portante del segnale,  $x_c(t)$  e  $x_s(t)$  sono processi aleatori congiuntamente WSS, con funzioni di autocorrelazione  $R_{x_c x_c}(\tau) = R_{x_s x_s}(\tau) = \text{sinc}(2W\tau)$  e funzione di mutua correlazione  $R_{x_c x_s}(\tau) \equiv 0$ , e  $\Theta$  è una variabile aleatoria uniforme in  $(0, 2\pi)$ , indipendente da  $x_c(t)$  e  $x_s(t)$ .

- Calcolare la funzione di autocorrelazione  $R_{xx}(\tau)$  e la densità spettrale di potenza (PSD) di  $x(t)$ .
- Nell'ipotesi in cui il segnale aleatorio  $x(t)$  sia moltiplicato per  $2 \cos(2\pi f_c t + \Theta)$  ed il segnale risultante  $y(t) = 2x(t) \cos(2\pi f_c t + \Theta)$  sia filtrato mediante un filtro passabasso ideale con guadagno in continua unitario e banda monolaterale  $W$ , calcolare l'uscita  $z(t)$  del filtro passabasso.