

PFA

Prova scritta di Probabilità e Fenomeni Aleatori del 21.09.2015 Tempo: 2 ore. NON è consentito l'uso di libri ed appunti propri

Gli allievi che devono sostenere l'esame di PFA o TFA (9 CFU) svolgano gli esercizi **1, 2, 4**.

Gli allievi che devono sostenere l'esame di TFA (6 CFU) svolgano gli esercizi **1, 2, 3**.

Indicare sullo svolgimento, oltre a nome, cognome e numero di matricola, i seguenti codici:

- **PFA** se si sostiene la prova di Probabilità e Fenomeni Aleatori;
- **TFA-9** se si sostiene la prova di Teoria e Fenomeni Aleatori da 9 CFU;
- **TFA-6** se si sostiene la prova di Teoria e Fenomeni Aleatori da 6 CFU.

ESERCIZIO 1 (10 punti)

Un'urna contiene 10 dadi dei quali 1 truccato in modo da dare 1 con probabilità $\frac{1}{2}$ e ognuno degli altri 5 risultati con probabilità $\frac{1}{10}$ (gli altri 9 dadi sono equilibrati). Dall'urna è estratto un dado che è poi lanciato tre volte.

- Qual è la probabilità che i risultati dei lanci siano due volte 1 e una volta 5?
- Qual è la probabilità che il dado sia truccato sapendo che i tre lanci hanno dato due volte 1 e una volta 5?
- Sapendo che i tre lanci hanno dato due volte 1 e una volta 5, è più probabile che si tratti di un dado truccato oppure di uno equilibrato?

ESERCIZIO 2 (10 punti)

Sia X una variabile aleatoria avente la seguente pdf

$$f_X(x) = \begin{cases} \vartheta x^{\vartheta-1}, & \text{se } 0 < x \leq 1; \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dove $\vartheta > 0$. Calcolare:

- la CDF di X ;
- la pdf della variabile aleatoria $Y \triangleq -\log X$;
- media e varianza di X .

ESERCIZIO 3 (10 punti)

Calcolare la pdf della somma di due variabili aleatorie X e Y statisticamente indipendenti ed uniformemente distribuite in $[0, 1]$.

ESERCIZIO 4 (10 punti)

Un processo aleatorio reale Gaussiano bianco $X(t)$, con media nulla e densità spettrale di potenza (PSD) pari a $N_0/2$, attraversa un filtro passa-basso ideale con risposta in frequenza

$$H(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right).$$

- Determinare la funzione di autocorrelazione del processo $Y(t)$ in uscita dal filtro passa-basso.
- Assumendo $\tau = 1/(2B)$, calcolare la pdf congiunta delle variabili aleatorie $Y(t)$ e $Y(t + \tau)$. Sono $Y(t)$ e $Y(t + \tau)$ statisticamente indipendenti? (motivare brevemente la risposta).