

# PFA

## Prova scritta di Probabilità e Fenomeni Aleatori del 13.07.2015 Tempo: 2 ore. NON è consentito l'uso di libri ed appunti propri

Gli allievi che devono sostenere l'esame di PFA o TFA (9 CFU) svolgano gli esercizi 1, 2, 4.

Gli allievi che devono sostenere l'esame di TFA (6 CFU) svolgano gli esercizi 1, 2, 3.

Indicare sullo svolgimento, oltre a nome, cognome e numero di matricola, i seguenti codici:

- **PFA** se si sostiene la prova di Probabilità e Fenomeni Aleatori;
- **TFA-9** se si sostiene la prova di Teoria e Fenomeni Aleatori da 9 CFU;
- **TFA-6** se si sostiene la prova di Teoria e Fenomeni Aleatori da 6 CFU.

### ESERCIZIO 1 (10 punti)

Si lanci una moneta  $n$  volte. Si consideri la variabile aleatoria  $Y$  pari alla differenza tra il numero di teste ed il numero di croci ottenute negli  $n$  lanci della moneta. Si assuma che la probabilità di ottenere testa in un singolo lancio sia pari a  $P(T) = p$  e che i lanci siano indipendenti.

- Determinare la DF della variabile aleatoria  $Y$  nel caso  $n = 3$ .
- Determinare la DF della variabile aleatoria  $Y$  nel caso  $n = 4$ .
- Discutere il caso di  $n$  arbitrario.

### ESERCIZIO 2 (10 punti)

Sia  $(X, Y)$  una coppia di variabili aleatorie caratterizzate dalla seguente pdf:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} kxy, & (x, y) \in D; \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

dove  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}$  è un dominio di  $\mathbb{R}^2$ .

- Determinare il valore della costante  $k$ .
- Utilizzando il valore di  $k$  precedentemente calcolato, determinare la correlazione  $E(XY)$  tra le variabili aleatorie  $X$  ed  $Y$ .

### ESERCIZIO 3 (10 punti)

Siano  $X$  e  $Y$  due variabili aleatorie a media nulla, di varianza  $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = 4$  e coefficiente di correlazione  $\rho_{XY} = 0.5$ . Si costruisca la variabile aleatoria  $W = aX + Y$ .

- Determinare il valore di  $a$  che rende minimo il valore quadratico medio di  $W$ ;
- determinare il valore minimo del valore quadratico medio.

### ESERCIZIO 4 (10 punti)

Siano  $X$  ed  $Y$  due variabili aleatorie gaussiane indipendenti, a media nulla e varianza unitaria, e si consideri il segnale aleatorio

$$x(n) = Xa^{-n}u(n) - Ya^n u(-n)$$

con  $a \neq 0$  costante deterministica.

- Dimostrare che il segnale  $x(n)$  è Gaussiano.
- Determinare la caratterizzazione statistica di  $x(n)$ .
- Studiare le proprietà di stazionarietà di  $x(n)$ .