

PFA

Prova scritta di Probabilità e Fenomeni Aleatori del 13.07.2015 Tempo: 2 ore. NON è consentito l'uso di libri ed appunti propri

Gli allievi che devono sostenere l'esame di PFA o TFA (9 CFU) svolgano gli esercizi 1, 2, 4.

Gli allievi che devono sostenere l'esame di TFA (6 CFU) svolgano gli esercizi 1, 2, 3.

Indicare sullo svolgimento, oltre a nome, cognome e numero di matricola, i seguenti codici:

- **PFA** se si sostiene la prova di Probabilità e Fenomeni Aleatori;
- **TFA-9** se si sostiene la prova di Teoria e Fenomeni Aleatori da 9 CFU;
- **TFA-6** se si sostiene la prova di Teoria e Fenomeni Aleatori da 6 CFU.

ESERCIZIO 1 (10 punti)

Si lanci una moneta n volte. Si consideri la variabile aleatoria Y pari alla differenza tra il numero di teste ed il numero di croci ottenute negli n lanci della moneta. Si assuma che la probabilità di ottenere testa in un singolo lancio sia pari a $P(T) = p$ e che i lanci siano indipendenti.

- Determinare la DF della variabile aleatoria Y nel caso $n = 3$.
- Determinare la DF della variabile aleatoria Y nel caso $n = 4$.
- Discutere il caso di n arbitrario.

ESERCIZIO 2 (10 punti)

Sia (X, Y) una coppia di variabili aleatorie caratterizzate dalla seguente pdf:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} kxy, & (x, y) \in D; \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}$ è un dominio di \mathbb{R}^2 .

- Determinare il valore della costante k .
- Utilizzando il valore di k precedentemente calcolato, determinare la correlazione $E(XY)$ tra le variabili aleatorie X ed Y .

ESERCIZIO 3 (10 punti)

Siano X e Y due variabili aleatorie a media nulla, di varianza $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = 4$ e coefficiente di correlazione $\rho_{XY} = 0.5$. Si costruisca la variabile aleatoria $W = aX + Y$.

- Determinare il valore di a che rende minimo il valore quadratico medio di W ;
- determinare il valore minimo del valore quadratico medio.

ESERCIZIO 4 (10 punti)

Siano X ed Y due variabili aleatorie gaussiane indipendenti, a media nulla e varianza unitaria, e si consideri il segnale aleatorio

$$x(n) = Xa^{-n}u(n) - Ya^n u(-n)$$

con $a \neq 0$ costante deterministica.

- Dimostrare che il segnale $x(n)$ è Gaussiano.
- Determinare la caratterizzazione statistica di $x(n)$.
- Studiare le proprietà di stazionarietà di $x(n)$.