

Prova scritta di Probabilità e Fenomeni Aleatori del 18.05.2015
Tempo: 2 ore. NON è consentito l'uso di libri ed appunti propri

Gli allievi che devono sostenere l'esame di PFA o TFA (9 CFU) svolgano gli esercizi 1, 2, 4.

Gli allievi che devono sostenere l'esame di TFA (6 CFU) svolgano gli esercizi 1, 2, 3.

Indicare sullo svolgimento, oltre a nome, cognome e numero di matricola, i seguenti codici:

- **PFA** se si sostiene la prova di Probabilità e Fenomeni Aleatori;
- **TFA-9** se si sostiene la prova di Teoria e Fenomeni Aleatori da 9 CFU;
- **TFA-6** se si sostiene la prova di Teoria e Fenomeni Aleatori da 6 CFU.

ESERCIZIO 1 (10 punti)

Sono date due urne. La prima contiene 4 palline bianche e 1 nera, la seconda 1 bianca e 2 nere. Si prende una carta da un mazzo di quaranta carte. Se è una figura si estrae una pallina dalla prima urna, altrimenti dalla seconda. Calcolare la probabilità di ottenere una pallina nera.

ESERCIZIO 2 (10 punti)

Sia X una v.a. avente pdf $f_X(x) = k_1 h(x) + k_2 \delta(x - 1)$, con k_1, k_2 costanti reali e

$$h(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1; \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- (a) Sapendo che $E(X) = \frac{5}{6}$, determinare i valori di k_1 e k_2 e rappresentare graficamente $f_X(x)$.
- (b) Determinare la CDF di X e rappresentarla graficamente.
- (c) Stabilire se X è una v.a. continua, discreta oppure mista.
- (d) Calcolare media e varianza della v.a. $Y = u(X - \frac{1}{2})$, dove $u(\cdot)$ è la funzione gradino unitario (esprimere i risultati in forma frazionaria).

ESERCIZIO 3 (10 punti)

Sia X una v.a. Gaussiana a media nulla e varianza σ^2 . Determinare la pdf della v.a.

$$Z = X + bA$$

dove A è una costante positiva e b è una v.a. statisticamente indipendente da X che assume i tre valori equiprobabili -1,0 ed 1. Valutare, inoltre, media e varianza di Z .

ESERCIZIO 4 (10 punti)

Siano X ed Y due vv.aa. gaussiane indipendenti, a media nulla e varianza σ^2 , e si consideri il segnale aleatorio

$$x(t) = X \cos(2\pi f_0 t) + Y \sin(2\pi f_0 t)$$

con f_0 costante deterministica.

- (a) Dimostrare che il segnale $x(t)$ è gaussiano.
- (b) Determinare la caratterizzazione statistica di $x(t)$.
- (c) Determinare la pdf del secondo ordine $f_x(x_1, x_2; t_1, t_2)$ di $x(t)$.
- (d) Studiare le proprietà di stazionarietà di $x(t)$.